АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЧАСТИЧНО-ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Специальность: 1203.01 − Компьютерные науки

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Шукюрова Нигяр Октай кызы**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии

Баку-2021

Диссертационная работа выполнена в Институте Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана.

Научный руководитель: д. ф.-м. наук, профессор
Князь Шираслан оглы Мамедов

Официальные оппоненты: д. ф.-м. наук, профессор
Мамед Хагверди оглы Ягубов

д. ф.-м. наук, профессор
Фикрат Гюлали оглы Фейзиев

доктор философии по математике, доцент
Рашад Октай оглы Масталиев

Диссертационный совет ED 1.19 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

д.ф.-м.н.,профессор
Галина Юрьевна Мехтиева

Ученый секретарь диссертационного совета:

к.ф.-м.н., доцент
Эльхан Нариман оглы Сабзиев

Председатель научного семинара:

Член-корр. НАНА, д.ф.-м.н., профессор
Вагиф Рза оглы Ибрагимов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Как известно, математические модели многих прикладных задач экономики и техники, связанные с принятием оптимальных решений, получаются в виде различных классов задач частично-целочисленного программирования. Начиная с середины прошлого века эти задачи интенсивно исследованы различными авторами с целью разработки методов их решения.

Отметим, что различные классы задач целочисленного программирования, в том числе с интервальными коэффициентами[1] рассмотрены многими учеными такими, как Бабаев Дж.Ф., Велиев Г.П., Гусейнов С.Я., Девятерикова М.В., Емеличев В.А., Ферха У., Колоколов А.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К., Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г., Li W., Li W., Liu X., Li H., Martello S., Pisinger D., Hladik M.[2] и т.д. Однако, все известные методы имеют экспоненциальные сложности. Такие задачи в литературе называются трудно-решаемыми и входят в класс NP-полных. Поэтому, разработаны специальные методы построения приближенного (субоптимального) решения различных классов задач частично-целочисленного программирования.

Необходимо отметить, что в экономике встречаются математические модели таких задач, в которых часть переменных должны принимать целые, а остальные любые значения. В таких моделях экономический смысл (значение) коэффициентов целевой функции, ограничений и правых частей означают прибыли, расходы и выделенные общие ресурсы, соответственно. Особенно следует отметить, что в условиях современной рыночной экономики, если прибыль, расходы и выделенные общие ре-

[1]Li, W. Generalized solutions to interval linear programmes and related necessary and sufficient optimality conditions / W. Li, X. Liu, H. Li // Optimization Methods Software, – 2015. 30(3), – p.516-530.
[2] Hladik M. On strong optimality of interval linear programming // Optimization Letters,–2017. 11(7),–p.1459-1468.

сурсы будут конкретными числами, то соответствующая модель не может адекватно (эквивалентно) описывать процесс. Потому, что в реальных обстоятельствах полученным прибылям, расходам и выделенным общим ресурсам должны позволить изменяться в некоторых пределах (интервалах). Очевидно, что такие модели будут более достоверно описывать процесс. Математические модели таких задач можно представить в виде:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right] x_j + \sum_{j=n+1}^{N}\left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right] x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right] x_j + \sum_{j=n+1}^{N}\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right] x_j \le \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right], \quad (i = \overline{1,m}), \tag{2}$$

$$0 \le x_j \le d_j, \quad \left(j = \overline{1,N}\right), \tag{3}$$

$$x_j, \text{ целые}, \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (n \le N) \tag{4}$$

Здесь предполагается, что $0 < \underline{c}_j \le \overline{c}_j, 0 \le \underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$, $0 < \underline{b}_i \le \overline{b}_i,\ d_j > 0, \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,N}\right)$ – заданные целые числа. Кроме того, интервалы $\left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right]$, $\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right]$ и $\left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right]$, $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,N})$ означают интервал изменения прибыли, расходы и выделенные ресурсы, соответственно. Отметим, что задача (1)-(4) называется задачей частично-целочисленного программирования с интервальными данными или интервальной задачей частично-целочисленного программирования.

Уместно заметить, что задача (1)-(4) является обобщением следующих известных задач: 1) задач Булевого программирования; 2) задач целочисленного программирования; 3) интервальной задачи Булевого программирования; 4) интервальной задачи целочисленного программирования; 5) интервальной задачи частично-Булевого программирования; 6) задач линейного программирования; 7) интервальной задачи линейного программирования, и т.д. Потому, что: 1) в случаях, когда концы интервалов совпадают, $n = N$ и $d_j = 1,\ \left(j = \overline{1,N}\right)$, получается задача Булевого программирования; 2) если $n = N$ и концы интервалов совпадают, получается задача целочисленного программирования; 3) если $d_j = 1,\ (j = \overline{1, N})$ и $n = N$ получается интервальная задача Булевого программирования; 4) если $n = N$ получается интер-вальная задача целочисленного программирования; 5) если $d_j = 1,\ (j = \overline{1, N})$ и $n < N$ получается интервальная задача час-тично-Булевого программирования; 6) если концы интервалов совпадают и $n = 0$ получается задача линейного программирования; 7) если $n = 0$ получается интервальная задача линейного программирования.

Отметим, что рассматриваемая задача (1)-(4) входит в класс NP-полных, поскольку все вышеуказанные частные случаи этой задачи, кроме задач линейного программирования NP-полные, другими словами, трудно-решаемые[3]. Различные классы этой задачи исследованы и разработаны специфические методы.

Необходимо заметить, что насколько нам известно, задача частично-целочисленного программирования с интервальными данными ещё не исследованы. Это может быть связано с тем, что они входят в класс NP-полных, а также со сложностью разработки методов их точного или приближённого решения.

Из вышеприведённых следует необходимость исследования и разработки методов решения задач (1) -(4).

Поэтому актуальность выбранной темы диссертационной работы не вызывает никаких сомнений.

Объект и предмет исследования. В диссертационной работе объектом исследования и предметом темы являются разработки методов и алгоритмов для нахождения приближённых (субоптимистических и субпессимистических) решений для различных классов задач частично-целочисленного программирования с интервальными коэффициентами. Такие типы задач

---

[3] Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон.– Москва: Мир, –1982. – 416 с.

встречаются в объектах экономики, где необходимо принимать оптимальное решение.

Цель и задачи исследования.

– Ввести понятия оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений для интервальной частично-Булевой задачи о ранце, интервальной задачи частично-Булевого программирования, и разработка методов построения субоптимистического и субпессимистического решений этих задач.

– Ввести понятия оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений частично-целочисленной задачи о ранце с интервальными данными, интервальной задачи частично-целочисленного программирования и на основе этих разработать метод для построения субоптимистического и субпессимистического решений этих задач.

– Для оценки погрешности оптимальных и приближённых (т.е. субоптимистических и субпессимистических) решений, разработать алгоритм нахождения верхней границы оптимума в интервальной частично-Булевой задаче о ранце и интервальной задаче частично-Булевого программирования.

– Построить мажорирующую функцию относительно целевой функции в интервальной задаче частично-Булевого программирования и доказать её основные свойства.

– Разработка алгоритма минимизации мажорирующей функции для определения верхней границы оптимистического и пессимистического значений целевой функции в интервальной задаче частично-Булевого программирования.

– Составить программные средства для разработанных алгоритмов и провести сравнительные эксперименты.

Методы исследований. В диссертационной работе были использованы принципы современной теории оптимизации, теории и методы математического и дискретного программирования, методы комбинаторного анализа и т.д.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Методы нахождения субоптимистического и субпессимистического решений частично-Булевой и частично-целочисленной задачи о ранце с интервальными коэффициентами.
2. Методы нахождения субоптимистического и субпессимистического решений задачи частично-Булевого и частично-целочисленного программирования с интервальными коэффициентами.
3. Разработка метода нелинейно-возрастающего штрафа для построения субоптимистического и субпессимистического решений интервальной задачи частично-Булевого и частично-целочисленного программирования.
4. С применением предложенных методов проведение многочисленных сравнительных экспериментов над задачами большой размерности.
5. Нахождение верхней границы максимального значения целевой функции в интервальной частично-Булевой задаче о ранце.
6. Построение мажорирующей функции относительно целевой функции в интервальной задаче частично-Булевого программирования и её свойства
7. Алгоритмы минимизации мажорирующей функции для оптимистических и пессимистических задач.

Научная новизна.

− Введенны понятия оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений для частично-Булевой задачи о ранце с интервальными коэффициентами и интервальной задачи частично-Булевого программирования и разработаны алгоритмы построения субоптимистического и субпессимистического решений этих задач.

− Аналогично, введены вышеуказанные определения для интервальной задачи частично-целочисленного программирования и разработаны алгоритмы построения субоптимистического и субпессимистического решений.

− Для оценки погрешностей приближённых решений от оптимального, построена мажорирующая функция относительно максимального значения целевой функции в интервальной задаче частично-Булевого программирования, доказаны её основные свойства и разработан алгоритм типа наискорейшего покоординатного спуска для минимизации этой функции.

- На основе предложенных методов, составлен комплекс программ и проведены многочисленные вычислительные с эксперименты.

Теоретическая и практическая ценность работы. Разработанные в диссертационной работе методы, алгоритмы и программные средства могут быть использованы для решения различных прикладных задач экономического и технического характера. В частности, в некоторых производственных областях, где выпускаются товары штучного и нештучного типа, могут быть применены модели и методы, рассмотренные в диссертации.

Кроме того, с применением программных комплексов, представленные в приложении, можно успешно решить такого типа различных задач. Необходимо отметить, что с применением этих программных средств можно определить не только приближённые решения соответствующих задач, но и оценка их близости к оптимальному.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации докладывались и обсуждались на следующих Республиканских, Международных конференциях и семинарах:
на Рес.Конф., посвящ.100-летию академика Амира Габиб-заде (2016 года, Баку); на III Рес. Науч. Конф.“ Задачи прикладной математики и новые информационные технологии” (15-16 декабря 2016 года, Баку); на Межд. Науч. Конф. “Проблемы теоретической и прикладной математики”(25-26 мая 2017года, Баку); 6-th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (11-13 july, 2018, Baku, Azerb.) **(выдан сертификат;** на II Межд. научно-практической конф. “Молодежный форум: Прикладная математика, Матемематическое Моделирование систем и механизмов” (2019 года, Воронеж); 7-th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (26-28 august, 2020, Baku, Azerb.); на Рес. Науч. Конф. “Фундаментальные проблемы математики и применение

интеллектуальных технологий в образовании” (3-4 июля 2020 года, Сумгайыт, Азерб.); на Науч. семинарах лаб. “Модели и Методы Дискретной Оптимизации” Института Систем Управлений НАН Азербайджана.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 16 научных работ, из них 9 – статьи, 5 из которых опубликованы в зарубежных странах, 7 статей опубликованы в материалах и тезисах Международных и Республиканских конференций.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена в Институте Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3-х глав, списка литературы из 198 наименований и приложений. Общий объем диссертации составляет 164 страниц (214190 знаков), машинописного текста, включая 36 таблиц. В частности, первая глава состоит из 55438, вторая-42615, третья-34120 знаков.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении анализируется современное состояние рассмотренной задачи и показывается актуальность выбранной темы.

Первая глава посвящена исследованию и разработке методов решения интервальной задачи частично-Булевого программирования. С этой целью введены понятия оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений для интервальных частично-Булевых задач о ранце и задачи частично-Булевого программирования.

В параграфе 1.1 главы I рассматривается следующая задача:

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{c}_j,\overline{c}_j]x_j + \sum_{j=n+1}^{N}[\underline{c}_j,\overline{c}_j]x_j \to max \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_j,\overline{a}_j]x_j+\sum_{j=\mathrm{n}+1}^{N}[\underline{a}_j,\overline{a}_j]x_j\le[\underline{b},\overline{b}]\,, \qquad (6)$$

$$0\le x_j\le 1,\left(j=\overline{1,N}\right), \qquad (7)$$

$$x_j=1\vee 0,\left(j=\overline{1,n}\right)\ (n\le N). \qquad (8)$$

Здесь предполагается, что $0<\underline{c}_j\le\overline{c}_j$, $0<\underline{a}_j\le\overline{a}_j$, $\left(j=\overline{1,N}\right)$, $0<\underline{b}\le\overline{b}$ и целые.

Для построения субоптимистического и субпессимистического решений введены следующие определения:

Определение 1. Допустимое решение $X^{op}=\left(x_1^{op},x_2^{op},\dots,x_N^{op}\right)$ задачи (5)-(8) назовём оптимистическим, если удовлетворяется неравенство

$$\sum_{j=1}^{N}\underline{a}_j x_j^{op}\le b,$$

для $\forall b\in\left[\underline{b},\overline{b}\right]$ и при этом значение функции

$$f^{op}=\sum_{j=1}^{N}\overline{c}_j x_j^{op}$$

будет максимальным.

Определение 2. Допустимое решение $X^{p}=\left(x_1^{p},x_2^{p},\dots,x_N^{p}\right)$ задачи (5)-(8) назовём пессимистическим, если удовлетворяется соотношение

$$\sum_{j=1}^{N}\overline{a}_j x_j^{p}\le b,$$

для $\forall b\in\left[\underline{b},\overline{b}\right]$ и при этом значение функции

$$f^{p}=\sum_{j=1}^{N}\underline{c}_j x_j^{p}$$

будет максимальным.

Определение 3. Допустимое решение $X^{so} = (x_1^{so}, x_2^{so}, \dots, x_N^{so})$ задачи (5)-(8) назовём субоптимистическим, если удовлетворяется

$$\sum_{j=1}^{N} \underline{a}_j x_j^{so} \le b,$$

для $\forall b \in [\underline{b}, \overline{b}]$ и при этом значение функции

$$f^{so} = \sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j x_j^{so}$$

будет принимать большое значение.

Определение 4. Допустимое решение $X^{sp} = \left(x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_N^{sp}\right)$ задачи (5)-(8) назовём субпессимистическим, если удовлетворяется соотношение

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_j x_j^{sp} \le b$$

для $\forall b \in [\underline{b}, \overline{b}]$ и при этом значение функции

$$f^{sp} = \sum_{j=1}^{N} \underline{c}_j x_j^{sp}$$

будет принимать большое значение.

Используя следующие критерии

$$j_* = arg \max_j \left(\overline{c}_j \,/\, \underline{a}_j\right) \tag{9}$$

$$j_* = arg \max_j \left(\underline{c}_j \,/\, \overline{a}_\mathrm{j}\right) \tag{10}$$

разработан алгоритм построения субоптимистического и субпессимистического решения задачи (5)-(8).

Необходимо заметить, что формулы (9) и (10) можно принимать как в качестве критерию выбора неизвестных x_j для построения субоптимистического или субпессимистического решений, соответственно. При этом необходимо учитывать случай, в какие интервалы входит найденный номер j_*, т.е. $j_* \in [1, \dots, n]$ или $j_* \in [n+1, n+2, \dots, N]$.

Отметим, что аналогично вышеуказанному, можно построить субпессимистическое решение $X^{sp} = \left(x_1^{sp}, x_2^{sp}, \dots, x_N^{sp}\right)$ задачи (5)-(8) используя критерий (10).

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть заданы интервалы $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$. Если $0 < a_1 \le a_2,\ 0 < b_1 \le b_2,$ то
$\min(a_1 \cdot b_1,\ a_1 \cdot b_2,\ a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) = a_1 \cdot b_1,$
$\max(a_1 \cdot b_1,\ a_1 \cdot b_2,\ a_2 \cdot b_1,\ a_2 \cdot b_2) = a_2 \cdot b_2.$

Теорема 2. Пусть заданы интервалы $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$. Если $0 < a_1 \le a_2, 0 < b_1 \le b_2,$ то
$\min(a_1/b_2, a_1/b_1, a_2/b_2, a_2/b_1) = a_1/b_2,\ \ \max(a_1/b_2, a_1/b_1, a_2/b_2, a_2/b_1) = a_2\ /\ b_1$. Таким образом $A \times B = [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$, $A\colon B = [a_1/b_2, a_2/b_1]$.

Преимущества этих теорем от приведённых в книге[4] заключается в том, что один и тот же результат можно получить, исходя из вышеуказанной оптимистической или пессимистической стратегии, проведя меньшее число операций.

В параграфе 1.2 рассматривается следующая задача со многими ограничениями:

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{c}_j, \overline{c}_j]x_j + \sum_{j=n+1}^{N}[\underline{c}_j, \overline{c}_j]x_j \to max \qquad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]x_j + \sum_{j=\mathrm{n}+1}^{N}[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]x_j \le [\underline{b}_i, \overline{b}_i],\ \ (i = \overline{1, m}\,). \qquad (12)$$

$$0 \le x_j \le 1, \left(j = \overline{1, N}\right), \qquad (13)$$

$$x_j = 1 \vee 0, \left(j = \overline{1, n}\right), (n \le N). \qquad (14)$$

[4] Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер – Пер. с англ. Москва: Мир, – 1987. – 360 с.

Здесь предполагается, что $0 < \underline{c}_j \le \overline{c}_j$, $0 \le \underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$, $0 < \underline{b}_i \le \overline{b}_i$, $(i = \overline{1,m}\ , j = \overline{1,N})$ заданные целые числа. Для построения субоптимистического и субпессимистического ре-шений этой задачи введены аналогичные как в параграфе 1.1 понятия оптимистического, пессимистического, субоптимисти-ческого и субпессимистического решений, которые являются более общей, чем введённые в работе[5].

Выведены следующие критерии выбора номера j_* неизвестных x_j для построения субоптимистического и субпессимистического решений для задачи (11)-(14), соответственно.

$$j_* = arg \max_j \left(\overline{c}_j \ / \max_i \underline{a}_{ij}\right), \tag{15}$$

$$j_* = arg \max_j \left(\underline{c}_j \ / \max_i \overline{a}_{ij}\right). \tag{16}$$

Таким образом, для построения субоптимистического решения можно использовать критерий (15), а для субпессимистического решения - (16). При этом необходимо учитывать случай, в какой интервал входит найденный номер j_*, т.е. $j_* \in [1, \dots, n] \equiv I$ или $j_* \in [n+1, n+2, \dots, N] \equiv R$.

Учитывая этих обстоятельств, разработаны два метода для построения приближённого решения.

В первом методе в случае, когда впервые присвоить неизвестному x_{j_*}, $(j_* \in R)$ единицу невозможно, то для этой неизвестной принимаем возможные максимальные дробные значения, а для остальных переменных принимаем значения нуль.

А во втором методе, как только впервые неизвестному x_{j_*}, $(j_* \in R)$ присвоить единицу невозможно, то найденный до тех пор значения неизвестных фиксируем, для остальных номеров $j, j \in I$ присваиваем $x_j := 0$ и для нефиксированных неизвест-н

[5] Мамедов, К.Ш., Мамедова, А.Г. Понятия субоптимистического и субпессимистического решений и построения их в интервальной задаче Булевого программирования //−Украина: «Радиоэлектроника, Информатика, Управление», − 2016. № 3(38), − с. 99-108.

ых x_j, $(j \in R)$ построим задачу линейного программирования. Далее, решив полученную задачу, присоединяем найденные координаты решений к ранее фиксированным. Процесс построения субоптимистического и субпессимистического решений начинается с $X^{so} = (0,0,\dots,0)$, $X^{sp} = (0,0,\dots,0)$.

В параграфе 1.3 первой главы рассматривается также задача (11)-(14), которая написана в следующей эквивалентной форме для фиксированных b_i, $(b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i], (i = \overline{1,m}))$:

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{c}_j, \overline{c}_j]x_j + \sum_{j=n+1}^{N}[\underline{c}_j, \overline{c}_j]x_j \to max, \qquad (17)$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{\alpha}_{ij}, \overline{\alpha}_{ij}]x_j + \sum_{j=\mathrm{n}+1}^{N}[\underline{\alpha}_{ij}, \overline{\alpha}_{ij}]x_j \le 1\,,\ (i = \overline{1,m}) \qquad (18)$$

$$0 \le x_j \le 1,\ \left(j = \overline{1,N}\right), \qquad (19)$$

$$x_j = 1 \vee 0,\ \left(j = \overline{1,n}\right),\ (n \le N). \qquad (20)$$

Здесь $\underline{\alpha}_{ij} = \underline{a}_{ij}/b_i$, $\overline{\alpha}_{ij} = \overline{a}_{ij}/b_i$, $b_i \coloneqq 1$, $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$. Очевидно, что $0 \le \underline{\alpha}_{ij} \le 1$, $0 \le \overline{\alpha}_{ij} \le 1$, $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,N})$.

Для построения субоптимистического решения используются следующий критерий (21):

$$j_* = arg\max_j \overline{Q}_j. \qquad (21)$$

Здесь $\overline{Q}_j = \overline{c}_j/\underline{q}_j$, $\left(j = \overline{1,N}\right)$,

$$\underline{q}_j = \sum_{i=1}^{m}\underline{\alpha}_{ij}\,\underline{t}_i, \qquad \left(j = \overline{1,N}\right),$$

$$\underline{t}_i = 1\,/\,(1 - \underline{r}_i),\ (i = \overline{1,m}), \qquad (22)$$

$$\underline{r}_i = \sum_{j \in \omega}\underline{\alpha}_{ij}\,, \qquad \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad \omega = \{j \,|\, x_j^{so} = 1\}.$$

В начале процесса построения решений принимается $\omega = \emptyset$. Аналогично можно построить субпессимистическое решение.

Как видно, здесь важное место занимает формула (22), которую называли штрафом. Поскольку, этот штраф при построении решения возрастает нелинейно, то этот метод называли **методом нелинейно-возрастающего штрафа**.

В параграфе 1.4 представлены результаты экспериментов для различных задач большой размерности.

Во второй главе разработаны методы решения интервальной задачи частично-целочисленного программирования.

В параграфе 2.1 рассмотрена следующая задача:

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{c}_j,\overline{c}_j]\,x_j+\sum_{j=n+1}^{N}[\underline{c}_j,\overline{c}_j]\,x_j\to\max, \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_j,\overline{a}_j]\,x_j+\sum_{j=n+1}^{N}[\underline{a}_j,\overline{a}_j]\,x_j\le[\underline{b},\overline{b}], \tag{24}$$

$$0\le x_j\le d_j \quad \left(j=\overline{1,N}\right), \tag{25}$$

$$x_j,\text{ целые }\left(j=\overline{1,n}\right),(n\le N). \tag{26}$$

Здесь предполагается, что $0<\underline{c}_j\le\ \overline{c}_j,\ 0\le\underline{a}_j\le\ \overline{a}_j$,,

$d_j>0,\left(j=\overline{1,N}\right),\ \ 0<\underline{b}\le\overline{b}$ и заданные целые числа.

Введены понятия оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений[6].

Исходя из некоторой экономической интерпретации задачи (23)-(26), выведены следующие критерии выбора номера неизвестных для построения субоптимистичесого и субпессимистического решений, соответственно:

$$j_*=arg\max_j(\overline{c}_j/\underline{a}_j),\qquad j_*=arg\max_j(\underline{c}_j/\overline{a}_j).$$

[6] **Mammadli N.O.** An algorithm for the construction of suboptimistic and subpessimistic solutions of a mixed integer knapsack problem with interval data // –Baku: Transactions of Azerbaijan National Academy of Sciences Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Informatics and Control Problems, – 2019. vol. 39, No.6, Issue 2, №.6, – p.74-80.

Здесь нужно учитывать обстоятельства, в какие множества входит номер j_*, т.е. $j_* \in [1, \dots, n]$ или $j_* \in [n+1, n+2, \dots, N]$.

Исходя из вышеприведённых критерий, разработаны алгоритмы для построения субоптимистического и субпессимистического решений задачи (23) -(26).

Примем обозначения $I = \{1, \dots, n\}$ и $R = \{n+1, n+2, \dots, N\}$. Кроме того, обозначим через S множество номеров неизвестных, которым присвоены ненулевые значения. Очевидно, что в начале $S = \emptyset$. Для построения субоптимистического решения по критерию

$$j_* = arg \max_{j \in I \cup R} (\overline{c}_j / \underline{a}_j). \tag{27}$$

рассматривается 2 случая:

1. Если $j_* \in I$, то принимаем

$$x_{j_*} = \min \left\{ d_{j_*}, \left[(b - \sum_{i \in S} \underline{a}_i x_i) / \underline{a}_{j_*} \right] \right\}, \qquad S := S \cup \{j_*\},$$

$I := I \backslash \{j_*\}$. Здесь обозначение $[z]$ означает целую часть z. Далее по формуле (27) находится очередной номер j_*.

2. Если $j_* \in R$, то принимаем

$$x_{j_*} = \min \left\{ d_{j_*}, (b - \sum_{i \in S} \underline{a}_i x_i) / \underline{a}_{j_*} \right\},$$

$S := S \cup \{j_*\}$, $R := R \backslash \{j_*\}$.

Здесь необходимо учитывать следующие варианты. Если

$$\min \left\{ d_{j_*}, (b - \sum_{i \in S} \underline{a}_i x_i) / \underline{a}_{j_*} \right\} = d_{j_*},$$

то вычислительный процесс продолжается вышеуказанным образом по критерию (27). А если

$$\min \left\{ d_{j_*}, (b - \sum_{i \in S} \underline{a}_i x_i) / \underline{a}_{j_*} \right\} = (b - \sum_{i \in S} \underline{a}_i x_i) / \underline{a}_{j_*},$$

то принимаем $x_j^{so} := 0$ для всех $j \notin S$ и процесс построения субоптимистического решения завершается. Процесс завершается, а также, когда $I \cup R = \emptyset$.

В параграфе 2.2 рассматривается следующая задача:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{c}_j,\overline{c}_j\right]x_j+\sum_{j=n+1}^{N}\left[\underline{c}_j,\overline{c}_j\right]x_j\to\max, \qquad (28)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}\right]x_j+\sum_{j=n+1}^{N}\left[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}\right]x_j\le\left[\underline{b}_i,\overline{b}_i\right],(i=\overline{1,m}), \qquad (29)$$

$$0\le x_j\le d_j,\ \left(j=\overline{1,N}\right), \qquad (30)$$

x_j, целые, $\left(j=\overline{1,n}\right)$, $(n\le N)$ (31)

Здесь коэффициенты задачи (28)-(31) – целые и удовлетворяют следующим условиям: $0<\underline{c}_j\le\ \overline{c}_j$, $0\le\underline{a}_{ij}\le\ \overline{a}_{ij}$, $0<\underline{b}_i\le\overline{b}_i$, $d_j>0,\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,N}\right)$.

Для этой задачи, используя аналогические понятия оптимистического и пессимистического решений, разработаны 2 метода построения приближённого решения, которые называем субоптимистическим и субпессимистическим.

Для этого выведены следующие критерии выбора неизвестных j_*

$$j_*=arg\left(\max_j\left(\overline{c}_j/\max_i\underline{a}_{ij}\right)\right) \qquad (32)$$

$$j_*=arg\left(\max_j\left(\underline{c}_j\ /\ \max_i\overline{a}_{ij}\right)\right) \qquad (33)$$

соответствующие для построения субоптимистического и субпессимистического решений[7].

В параграфе 2.3 также рассматривается задача (28)-(31). Для этой задачи вводится определения, аналогичные 1-4, которые являются более общей. С целью построения субоптимистического и субпессимистического решения в задаче (28)-(31) фиксируем некоторые $b_i\in\left[\underline{b}_i,\overline{b}_i\right]$, $(i=\overline{1,m})$ и обе части нера-

[7] **Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О.** Метод построения приближённого решения интервальной задачи частично-целочисленого программирования //–Москва: Евразийский Союз Ученых (ЕСУ), –2019. №4(61), – с. 29-36.

венства (29) разделим на $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $(i = \overline{1,m})$. В результате получаем следующую эквивалентную задачу:

$$\sum_{j=1}^{n} [\underline{c}_j, \overline{c}_j]\, x_j + \sum_{j=n+1}^{N} [\underline{c}_j, \overline{c}_j]\, x_j \to \max, \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [\underline{\alpha}_{ij}, \overline{\alpha}_{ij}]\, x_j + \sum_{j=n+1}^{N} [\underline{\alpha}_{ij}, \overline{\alpha}_{ij}]\, x_j \le 1,\ (i = \overline{1,m}), \tag{35}$$

$$0 \le x_j \le d_j,\ \left(j = \overline{1,N}\right), \tag{36}$$

$$x_j, \text{ целые}, \left(j = \overline{1,n}\right), (n \le N). \tag{37}$$

Здесь $\underline{\alpha}_{ij} = \underline{a}_{ij}/b_i$, $\overline{\alpha}_{ij} = \overline{a}_{ij}/b_i$, $0 \le \underline{\alpha}_{ij} \le 1, 0 \le \overline{\alpha}_{ij} \le 1$, $(i = \overline{1,m}), \left(j = \overline{1,N}\right)$. Далее для различного номера j_* последовательно назначается положительное значение для $x_{j_*}^{so}$. Нахождение номера j_* основано на следующем определении:

Определение 5. Число $\underline{t}_i = 1/(1 - \underline{r}_i)$, $(i = \overline{1,m})$ назовём **штрафом** за использование оставшихся правых частей системы (35) для принятия очередного положительного значения для x_j^{so}, $\left(j = \overline{1,N}\right)$, где

$$\underline{r}_i = \sum_{j \in \omega} \underline{\alpha}_{ij}\, x_j^{so}, \qquad (i = \overline{1,m}), \qquad \omega = \{j, \left| x_j^{so} > 0\right\}.$$

Для построения субоптимистического решения используется следующий критерий выбора номера j_*:

$$j_* = arg \max_{j \in I \cup R} \{\, \overline{c}_j / \underline{q}_j\}$$

$$\underline{q}_j = \sum_{j=1}^{N} \underline{\alpha}_{ij}\, \underline{t}_i, \qquad \left(j = \overline{1,N}\right),$$

Третья глава, состоящая из четырёх параграфов, посвящена оцениванию погрешностей субоптимистических и субпессимистических решений от оптимистических и пессимистических. С этой целью определяется верхняя граница максимального значения целевой функции.

В параграфе 3.1 рассматривается интервальная частично-Булевая задача о ранце (9)-(12).

Для этой задачи построены следующие функции

$$L^{op}(\lambda) = \sum_{j\in\omega_1^{op}} \overline{c}_j + \sum_{j\in\omega_2^{op}} \overline{c}_j + \left(b - \sum_{j\in\omega_1^{op}} \underline{a}_j - \sum_{j\in\omega_2^{op}} \underline{a}_j\right)\cdot\lambda,$$

$$L^{p}(\lambda) = \sum_{j\in\omega_1^{p}} \underline{c}_j + \sum_{j\in\omega_2^{p}} \underline{c}_j + \left(b - \sum_{j\in\omega_1^{p}} \overline{a}_j - \sum_{j\in\omega_2^{o}} \overline{a}_j\right)\cdot\lambda.$$

Здесь $b \in [\underline{b}, \overline{b}]$ фиксировано и

$$\omega_1^{op} = \{1 \le j \le n | \overline{c}_j - \underline{a}_j \cdot \lambda > 0\},$$
$$\omega_2^{op} = \{n+1 \le j \le N | \overline{c}_j - \underline{a}_j \cdot \lambda > 0\},$$
$$\omega_1^{p} = \{1 \le j \le n | \underline{c}_j - \overline{a}_j \cdot \lambda > 0\},$$
$$\omega_2^{p} = \{n+1 \le j \le N | \underline{c}_j - \overline{a}_j \cdot \lambda > 0\}.$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Справедливы следующие неравенства:

$$f_*^{op} \le \min_{\lambda\ge 0} L^{op}(\lambda), \qquad f_*^{p} \le \min_{\lambda\ge 0} L^{p}(\lambda),$$

где f_*^{op} и f_*^{p}– оптимистическое и пессимистическое значение целевой функции, соответственно.

Теорема 2. Функции $L^{op}(\lambda)$ и $L^{p}(\lambda)$ являются непрерывными, кусочно-линейными, недифференцируемыми и выпуклыми.

Теорема 3. Минимальные значения $L^{op}(\lambda)$ и $L^{p}(\lambda)$ совпадают с максимальными значениями целевых функций оптимистической и пессимистической непрерывной задачи (9)-(12), соответственно.

Разработаны алгоритмы минимизации этих функций.

В параграфе 3.2 построены следующие мажорирующие функции относительно целевой функции для интервальной задачи частично-Булевого программирования (15)-(18).

$$L^{op}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \sum_{j\in\omega_1^{op}} \overline{c}_j + \sum_{j\in\omega_2^{op}} \overline{c}_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(b_i-\sum_{j\in\omega_1^{op}}\underline{a}_{ij}-\sum_{j\in\omega_2^{op}}\underline{a}_{ij}\right)\lambda_i,$$

$$L^p(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)=\sum_{j\in\omega_1^p}\underline{c}_j+\sum_{j\in\omega_2^p}\underline{c}_j+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(b_i-\sum_{j\in\omega_1^p}\overline{a}_{ij}-\sum_{j\in\omega_2^p}\overline{a}_{ij}\right)\lambda_i,$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^{op}&=\left\{1\le j\le n\middle|\overline{c}_j-\sum_{i=1}^{m}\underline{a}_{ij}\lambda_i>0\right\},\\ \omega_2^{op}&=\left\{n+1\le j\le N\middle|\overline{c}_j-\sum_{i=1}^{m}\underline{a}_{ij}\lambda_i>0\right\}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^{p}&=\left\{1\le j\le n\middle|\underline{c}_j-\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_{ij}\lambda_i>0\right\},\\ \omega_2^{p}&=\left\{n+1\le j\le N\middle|\underline{c}_j-\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_{ij}\lambda_i>0\right\}\end{aligned}\right\}.$$

Показано, что, функции $L^{op}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ и $L^p(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ являются функциями типа Лагранжа. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 4. Для оптимистического значения f_*^{op} и пессимистического значения f_*^p целевой функции задачи (15)-(18) справедливо следующие неравенства:

$$f_*^{op}\le\min_{\lambda_i\ge0}L^{op}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m),\qquad f_*^{p}\le\min_{\lambda_i\ge0}L^{p}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m).$$

Теорема 4 показывает, что минимизируя функции $L^{op}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ или $L^p(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$, можно найти верхние границы для f_*^{op} или f_*^p, соответственно. Для этого в теореме 5 доказаны некоторые свойства функции $L^{op}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ и

$L^p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, которые создают математическую основу минимизации.

Теорема 5. Функции $L^{op}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ и $L^p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ являются кусочно-линейными, непрерывными, недифференцируемыми и выпуклыми.

Следствие. Из теоремы 5 непосредственно следует, что функции $L^{op}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ и $L^p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ имеют единственные минимумы. Следовательно, разработка алгоритмов минимизации этих функций имеет место.

В параграфе 3.3 разработаны алгоритмы типа наискорейшего покоординатного спуска для минимизации этих функций.

Наконец, **в** параграфе **3.4** приведены результаты многочисленных вычислительных экспериментов для различных задач большой размерности со случайными коэффициентами.

В приложении приводится программа для нахождения субоптимистического и субпессимистического решений интервальной частично-целочисленной задачи о ранце, с оценкой отклонения от оптимистического и пессимистического значений целевой функции, соответственно.

Автор выражает благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессор Мамедову К.Ш. за постоянное внимание к работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Для интервальной задачи частично-Булевого программирования с одним и со многими ограничениями введены понятия оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений. Разработаны методы нахождения субоптимистического и субпессимистического решения этих задач.
2. Исходя из экономической интерпретации интервальной задачи частично-Булевого программирования, введено понятие нелинейно-возрастающего штрафа. На основе этого, предложен метод нелинейно-возрастающего штрафа для построения субоптимистического и субпессимистического решений этой задачи.
3. Введены более общие понятия допустимого, оптимистического, пессимистического, субоптимистического и субпессимистического решений для интервальной задачи частично-целочисленного программирования с одним и со многими ограничениями. Далее, предложены методы построения субоптимистического и субпессимистического решения этих задач.
4. Используя понятие нелинейно-возрастающего штрафа, введенные в диссертационной работе для задач частично-целочисленного программирования с интервальными коэффициентами разработан метод нахождения субоптимистического и субпессимистического решений.
5. С целью определения близости субоптимистического и субпессимистического решений к оптимистическому и пессимистическому, разработан алгоритм нахождения верхней границы оптимистического и пессимистического значений функционала для интервальной задачи частично-Булевого программирования с одним и со многими ограничениями.
6. Разработаны алгоритмы всех предложенных методов в диссертационной работе и составлены программы этих алгоритмов. Используя этих программ, проведены мно-

гочисленные вычислительные эксперименты над различными случайными задачами большой размерности.

7. В диссертационную работу включёна программа нахождения субоптимистического и субпессимистического решений иопределение их соответствующей погрешности для интервальной частично-целочисленной задачи о ранце, как приложение.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. **Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О.** Построение субоптимистического и субпессимистического решений интервальной частично-Булевой задачи о ранце // Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş "Funksional Analiz və Onun Tətbiqləri" adlı konfransının Materialları,– Bakı: – 2016, –s.160-161.
2. **Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О.** Построение субоптимисти-ческого и субпессимистического решений в интервальной задаче частично-Булевого программирования // "Riyaziyyatın Tətbiqi Məsələləri və Yeni İnformasiya Texnologiyları" adlı III Respublika Elmi Konfrans Matereriallları, – Bakı: – 15-16 dekabr, – 2016, – s.113-114.
3. **Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О.** Методы построения субоптимистического и субпессимистического решений частично-Булевой задачи о ранце с интервальными данными // Известия НАНА, сер. «Физико-технических и математических Наук»,–Баку, – 2016. vol.XXXVI, №6, – s.6-13.
4. **Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О.** Решение частично-целочисленной задачи о ранце с интервальными данными // Riyaziyyatın Nəzəri və Tətbiqi Problemləri Beynəlxalq Elmi Konfransın Materialları, – Sumqayıt: – 25-26 may, – 2017, – s.229-230.
5. **Mammadov K.Sh., Mammadli N.O.** Two methods for construction of suboptimistic and subpessimistic solutions of the interval problem of mixed-Boolean programming

// –Ukraine: Journal “Radio Electronics, Computer Science, Control”, – 2018. №3(46), – p.57-67.
6. **Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О.** Методы приближённого решения задач частично-Булевого программирования с интервальными данными //– Известия НАНА, сер. «Физико-технических и математических Наук»,– Баку, – 2018. vol.XXXVIII, №3, – s. 27-35.
7. **Mammadov K. Sh., Mammadli N.O.** Method of finding sub-optimistic and subpessimistic solutions of the mixed-Boolean programming problem with interval data // Materials of “The 6-th Int. Conf. on Control and Optimization with Industrial Applications”, –Baku: – 11-13 July,– 2018. vol.II, – p.217-219.
8. **Mammadov K. Sh., Mammadli N.O.** Methods for finding suboptimistic and subpessimistic solutions to interval part of the integer programming problem // –Baku: Transactions of Azerbaijan National Academy of Sciences Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Informatics and Control Problems, – 2019. vol.39, №.3, –p.56-63.
9. **Mammadli N.O.** An algorithm for the construction of suboptimistic and subpessimistic solutions of a mixed integer knapsack problem with interval data // – Baku: Transactions of Azerbaijan National Academy of Sciences Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Informatics and Control Problems, –2019. vol. 39, No.6, Issue 2, №.6, – p.74-80.
10. **Mammadov K.Sh., Mammadli N.O.** Approximate solutions of the interval problem of mixed-integer programming // – Bakı: AMEA “Məruzələr”,– 2019. №1, – p.25-28.
11. **Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О.** Построение субоптимистического и субпессимистического решений частично-целочисленной интервальной задачи о ранце // –Воронеж: Актуальные направления научных исследований XXI века: “Теория и практика”, – 2019.vol.7, №1(44), – с. 247-251.

12. **Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О.** Метод построения приближённого решения интервальной задачи частично-целочисленого программирования // −Москва: Евразийский Союз Ученых (ЕСУ), −2019. №4(61), − с. 29-36.
13. Mammadli N.O. The Determination of an Upper Bound of the Maximum Value of the Objective Function in an Interval Mixed Boolean Knapsack Problem //− Москва: Евразийский Союз Ученых (ЕСУ),− 2019. № 9 (66), − p.49-54.
14. **Мамедов К.Ш., Мамедли Н.О.** Приближённые решения интервальной задачи частично-целочисленного программирования // Riyaziyyatin Fundamental Problemləri və Intellektual Texnologiyalarin Təhsildə Tətbiqi Respublika Elmi Konfransinin Materiallari,−Sumqayıt, −2020, − с.71-75.
15. **Mammadov K.Sh., Mammadli N.O.** A method for finding the upper bound of optimistic and pessimistic values of the functional in the interval Boolean programming problem // Materials of “The 7-th Int. Conf. on Control and Optimization with Industrial Applications”, −Baku: 26-28 august, − 2020. vol. I, p.251-253.
16. **Мамедов, К.Ш., Мамедли Н.О.** Построение функции типа Лагранжа в интервальной задаче частично-Булевого программирования // Москва: Евразийский Союз Ученых (ЕСУ),−2020. Том 6, №9(78),− с. 46-52.

Личный вклад автора в совместно выполненные работы:

В работах [1-3] – построение модели и проведение вычислительных экспериментов;

[4]–разработка алгоритмов и проведение вычислительных экспериментов;

[5]–разработка одного из двух методов, составление всех алгоритмов и вычислительный эксперимент;

[6-8]–составление модели, расширение некоторых понятий для более общей задачи и участие при разработке методов решения;

[10-12] – разработка алгоритмов предложенных методов; [14,15,16] –составление алгоритмов минимизации мажорирующей функции типа Лагранжа.

Защита диссертации состоится 21 января 2022 года в $16:^{00}$ на заседании Диссертационного совета ED 1.19 действующего на базе Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Адрес: AZ1141, Баку, ул.Б.Вагабзаде, 68.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Сис тем Управления НАН Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам
20 декабря 2021 года

Подписано в печать: 03.12.2021

Формат бумаги: А5

Объём: 36846

Тираж: 70