AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

DİFERENSİALLANAN ÇOXOBRAZLILAR VƏ ONLARIN LAYLANMA FƏZALARINDA XÜSUSİ RİMAN METRİKALARININ HƏNDƏSƏLƏRİ HAQQINDA

İxtisas: 1204.01– Həndəsə
Elm sahəsi: Riyaziyyat
İddiaçı: **Sevil Fəhrat qızı Kazımova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2021

Dissertasiya işi **Bakı Dövlət Universitetinin «Cəbr və həndəsə»** kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbərlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Arif Ağacan oğlu Səlimov
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Habil Dövlət oğlu Fəttayev

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Xaliq Qarakişi oğlu Hüseynov
riyaziyyat elmləri doktoru, dosent
Furkan Yıldırım
riyaziyyat elmləri doktoru, dosent
Haşim Çayır

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən BFD 2.17 Birdəfəlik Dissertasiya şurası

Birdəfəlik Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA-nın həqiqi üzvü, f.-r.e.d., professor

______________ **Məhəmməd Fərman oğlu Mehdiyev**

Birdəfəlik Dissertasiya şurasının elmi katibi
mexanika elmləri doktoru, dosent

______________ **Laura Faiq qızı Fətullayeva**

Birdəfəlik elmi seminarın sədri:
AMEA-nın həqiqi üzvü, f.-r.e.d., professor

______________ **Fikrət Əhmədəli oğlu Əliyev**

İmzanı təsdiq edirəm
BAKI DÖVLƏT UNIVERSITETININ
ELMI KATIBI
______ prof. V.M.SALMANOV
« 23 » __ X __ 20 21 il

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Müasir diferensial həndəsənin ən çox inkişaf etmiş sahələrindən biri laylanma fəzaları nəzəriyyəsidir. Diferensial- həndəsi strukturların, o cümlədən vektor və tenzor meydanlarının, afin rabitələrin, Riman metrikalarının hamar çozobrazlılar üzərində və onların laylanma fəzalarında tədqiqi ilə bağlı məsələ aktuallığı ilə seçilən məsələlərdən biridir. Laylanma fəzasının bazasında verilən analoji diferensial-həndəsi strukturların liftləri (şaquli, tam və horizontal liftlər) kimi təyin olunan diferensial-həndəsi strukturlar daha çox maraq kəsb edir. Bu hər şeydən əvvəl, həmin liftlərin bazada verilən strukturların əsas xassələrini təkrarlamaları ilə əlaqədardır. Vektor meydanlarının toxunan laylanma fəzasına şaquli, tam və horizontal liftləri S.Sasaki, S.İşihara, K.Yano, Ş.Kobayaşi tərəfindən qurulmuşdur. Baza Riman çoxobrazlısı olduğu halda S.Sasaki toxunan laylanma fəzasında xüsusi növ Riman metrikasını təyin etmişdir ki, sonralar bu metrikanı Sasaki metrikası və ya Riman metrikasının diaqonal lifti adlandırmışlar. Liftlərin qurulması toxunan laylanma fəzasında sanki kompleks və parakompleks (və ya sanki hasil) strukturları tədqiq etməyə imkan vermişdir. Toxunan laylanma fəzasında dual strukturun (sanki toxunan strukturun) varlığı A.P.Şirokova bu laylanma fəzasını dual ədədlər cəbri üzərində qurulan çoxobrazlı kimi interpretasiya etməyə imkan vermişdir. Bunun əsasında toxunan laylanma fəzasında tenzor meydanlarının və afin rabitələrin liftlərinin qurulması xeyli asanlaşır. Bu ideya yarımtoxunan laylanma fəzalarının tədqiqi zamanı inkişaf etdirilmişdir. Kotoxunan laylanma fəzalarının və xətti reperlərin laylanma fəzalarının tədqiqi zamanı da toxunan laylanma fəzalarının tədqiqi nəticəsində əldə edilən nəticələrə analoji nəticələr alınmışdır. Kotoxunan laylanma fəzasında Sasaki metrikası Mok tərəfindən qurulmuş, onun ayrı-ayrı xassələri müxtəlif alimlər tərəfindən tədqiq olunmuşdur. Xətti reperlərin laylanma fəzasında Sasaki metrikasının müxtəlif modifikasiyaları əsasən O.Kovalski və M.Sekizava tərəfindən öyrənilmişdir. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, Sasaki metrikaları, həmçinin Çiger-Qromol metrikaları da bu sinifdəndirlər. Hamar çoxobrazlılar üzərində müxtəlif tipli tenzor laylanma fəzalarında diferensial-həndəsi strukturların, o cümlədən tenzor meydanlarının, afin rabitələrin liftlərinin və müxtəlif metrikaların tədqiqi ilə bağlı bir sıra maraqlı nəticələr alınmışdır. Toxunan və kotoxunan laylanma fəzalarında təbii Riman metrikalarının ayrı-ayrı yeni növlərinin qurulması, onların əyrilik xassələrinin, Levi-Çivita rabitəsinin tədqiqi aktuallığı ilə seçilən məsələlərdən olsa da, bu məsələ kifayət qədər geniş şəkildə araşdırılmamışdır. Təqdim olunan dissertasiya işinin mövzusu bu məsələlərin həlli ilə bağlıdır. Bu mənada **dissertasiya işinin mövzusu aktualdır.**

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Toxunan və kotoxunan laylanma fəzalarında təbii Riman metrikalarının geodezik əyrilikləri, onların əsas xassələri, Levi-Çivita rabitəsinin tədqiq olunması.

Tədqiqatın məqsədi və vəzifələri. Dissertasiya işin əsas məqsədi toxunan və kotoxunan laylanma fəzalarında Riman metrikalarının geniş bir sinfi olan təbii Riman metrikaları sinfinin ayrı-ayrı yeni növlərinin qurulması və onların əyrilik xassələrinin öyrənilməsidir.

Tədqiqat metodları. Baxılan məsələlərin tədqiqində hamar çoxobrazlılar üzərində tenzor hesabı metodundan istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas elmi nəticələr alınmışdır:

1. Çiger-Gromol metrikalarının geodezik əyrilərinin toxunan laylanma fəzalarında interpretasiyaları haqqında;
2. Toxunan laylanma fəzasında simplektik metrikanın tam liftinin kanonik simplektik inikas zamanı kotoxunan laylanma fəzasının təbii simplektik metrikasına çevrilməsi;
3. Kanonik simplektik inikas zamanı vektor, affinor və (1,2) tipli tenzor meydanlarının tam liftlərinin obrazlarının yenidən tam liftlər olmaları üçün zəruri və kafi şərtlər;
4. Kotoxunan laylanmalardakı Peterson mənasında genişlənmiş Riman metrikalarına görə vektor meydanlarının Killinq vektoru olması şərtləri, onların Norden metrikası olması şərtləri.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində alınmış əsas nəticələr yenidir və tam isbatla təsdiq olunmuşdur. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

1. Çiger-Gromol metrikalarının geodezik əyrilərinin toxunan laylanma fəzalarında interpretasiyaları verilmişdir;
2. Toxunan laylanma fəzasında simplektik metrikanın tam liftinin

kanonik simplektik inikas zamanı kotoxunan laylanma fəzasının təbii simplektik metrikasına çevrildiyi göstərilmişdir;
3. Kanonik simplektik inikas zamanı vektor, affinor və (1,2) tipli tenzor meydanlarının tam liftlərinin obrazlarının yenidən tam liftlər olmaları üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;
4. Kotoxunan laylanmalardakı Peterson mənasında genişlənmiş Riman metrikalarına görə vektor meydanlarının Killinq vektoru olması şərtləri verilmiş, onların Norden metrikası olması şərtləri tapılmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktik əhəmiyyəti. Dissertasiya işində araşdırılan məsələlər əsasən nəzəri xarakter daşıyır. Dissertasiya-da alınan nəticələr və həmçinin dissertasiyada istifadə olunan metodlar yuxarı ixtisas kurslarının tədrisində istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin nəticələri ölkə daxilində Əməkdar elm xadimi, akademik Ə.İ.Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş Elmi Konfransda (Bakı, 2007), Gəncə Dövlət Universitetində keçirilən "Riyazi nəzəriyyələr, onların tətbiqi və tədrisi sahəsində olan problemlər" adlı Beynəlxalq Elmi Konfransında (Gəncə, 2008), Azərbaycanın Ümumilli Lideri Heydər Əliyevin 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Tələbə, Magistrant və gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi Konfransında (Bakı, 2008), Azərbaycan xalqının Ümumilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 91 illiyinə həsr olunmuş Magistr, doktorant və gənc tədqiqatçıların "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika Elmi Konfransında (Bakı, 2014), Bakı Dövlət Universitetinin 95-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" mövzusunda Elmi Konfransında (Bakı, 2014), Azərbaycanın görkəmli alimi və ictimai xadimi, Dövlət mükafatı laureatı, Əməkdar elm xadimi, BDU-nun sabiq rektoru, AMEA-nın müxbir üzvü, professor Y.C.Məmmədovun anadan olmasının 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynlxalq Elmi Konfransında (Bakı, 2015), Azərbaycan xalqının Ümumilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika Elmi Konfransında (Bakı, 2015), o cümlədən, ölkə xaricində Özbəkistanda keçirilmiş "İnternational conference modern problems of geometry and topology and their applications” adlı Elmi Konfransında (Özbəkistan, 2019) məruzə edilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin “Mexanika-riyaziyyat” fakültəsinin “Cəbr və həndəsə” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

İddiaçının şəxsi töhfəsi. Dissertasiya işində alınan bütün elmi yeniliklər və eləcə də nəticələr iddiaçıya məxsusdur.

Çap olunmuş elmi əsərlər. Dissertasiya işinin əsas nəticələri iddiaçının 3-ü “Clarivate Analitics” agentliyinin “Web of Science” bazasına daxil olan jurnallarda olmaqla Ali Attestasiya Komissiyasının tövsiyə etdiyi elmi nəşrlərdə çap etdirdiyi 7 elmi məqaləsində öz əksini tapmışdır. Nəşr olunmuş məqalələrdən 2-i həmmüəllifsizdir. Bundan əlavə dissertasiya işində alınan nəticələr beynəlxalq səviyyəli 3 və respublika səviyyəli 5 elmi konfransda məruzə edilmiş və bu məruzələr uyğun konfrans materiallarında öz əkslərini tezis şəklində tapmışlar. Bu tezislərdən biri xaricdə dərc olunmuş jurnalda çap edilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrı-ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi giriş, üç fəsildən, nəticə (titul səhifəsi–424 işarə, mündəricat – 2875 işarə, giriş – 24000 işarə, I fəsil -40000 işarə, II fəsil–66000, III fəsil -76000, nəticə–602 işarə) və 106 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin ümumi həcmi–209901 işarədir.

DİSSERTASİYA İŞİN QISA MƏZMUNU

Giriş və üç fəsildən ibarət olan dissertasiya işinin qısa xülasəsini verək. *Girişdə* dissertasiyaya aid olan işlərin qısa xülasəsi verilmiş, dissertasiya işinin mövzusunun aktuallığı əsaslandırılmış, işdə alınan əsas nəticələr əks olunmuş və digər işlərin nəticələri ilə müqayisəsi verilmişdir. *Birinci fəsil* üç yarımfəsildən ibarətdir. Birinci fəsildə diferensiallanan çoxobrazlılar üzərində Riman metrikaları, afinor strukturları və laylanma fəzaları haqqında əsas anlayışlar verilmişdir.

Birinci fəslin birinci yarımfəslində xəritə, atlas, diferensiallanan çoxobrazlı və çoxobrazlı üzərində afin rabitə, eləcə də afin rabitənin əyrilik və buruqluq tenzoru anlayışlarına tərif verilir.

Birinci fəslin ikinci yarımfəslində C^{∞} sinifindən olan M_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində $S-$struktura tərif verilir. Daha sonra poliafinor struktura və ya sadəcə $\Pi-$struktura tərif verilir.

Bu yarımfəslin sonunda Norden metrikasına və (M_{2n},φ,g) Norden çoxobrazlısına tərif verilir.

Əgər (M_{2n},φ,g) g holomorf Norden metrikasına malik Norden çoxobrazlısıdırsa, onda onda deyirlər ki, (M_{2n},φ,g) holomorf Norden çoxobrazlısıdır.

Birinci fəslin üçüncü yarımfəslində diferensiallanan çoxobrazlının laylanma fəzalarına tərif verilir.Vektor laylanmalarına dair bəzi misallar göstərilir.

İkinci fəsildə toxunan laylanma fəzalarında təbii (natural) metrikalara baxılır, onların diferensial həndəsi strukturları qurulur.

İkinci fəslin birinci yarımfəslində Riman çoxobrazlısı üzərində toxunan laylanmada Sasaki metrikası haqqında ətraflı məlumat verilir. $\hat{g}$ Sasaki metrikasına nəzərən toxunan laylanmanın Levi-Çivita rabitəsi təyin edilir.

Toxunan laylanmada Sasaki metrikasının Levi-Çivita rabitəsinin əyrilik tenzorunu, eləcə də Sasaki metrikasına malik $(T(M_n),\hat{g})$ toxunan laylanmasının Riman əyrilik tenzorunu hesablamaq üçün düsturlar qeyd olunur.

İkinci fəslin ikinci yarımfəslində $T(M_n)$ toxunan laylanması üzərində Çiger-Gromol metrikasına tərif verilir və bu metrikaya malik olan toxunan laylanmanın Levi-Çivita rabitəsi təyin olunur.

Levi-Çivita rabitəsinin təyin olunduğunu nəzərə alaraq $T(M_n)$ toxunan laylanmasının Riman əyrilik tenzorunu hesablanır.

İkinci fəslin üçüncü yarımfəslində Riman çoxobrazlısı üzərində toxunan laylanmada adaptə olunmuş reperdə Çiger–Gromol metrikasının bəzi xassələri öyrənilir. $T(M_n)$ toxunan laylanması üzərində ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikası bütün $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$ vektor meydanları üçün aşağıdakı kimi də təyin edilir:

$$ {}^{CG}g\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)={}^{V}\left(g(X,Y)\right), \tag{1} $$
$$ {}^{CG}g\left({}^{H}X,{}^{V}Y\right)=0, \tag{2} $$
$$ {}^{CG}g\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right)=\frac{1}{1+r^2}\left[{}^{V}\left(g(X,Y)\right)+(\gamma g_X)+(\gamma g_Y)\right], \tag{3} $$
burada
$$ {}^{V}\left(g(X,Y)\right)=\left(g(X,Y)\right)\circ\pi. $$

Aşkardır ki, ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikası təbii (natural) metrikalar sinfinə daxildir (Qeyd edək ki, toxunan laylanma üzərində təbii metrika dedikdə biz (1) və (2) şərtləri ilə təyin edilən metrikanı nəzərdə tuturuq).

İkinci fəslin dördüncü yarımfəslində adaptə olunmuş (seçilmiş) reperdə Çiger-Gromol metrikasının Levi-Çivita rabitəsi haqqında teorem verilir:

Teorem 1. Tutaq ki, (M_n, g) Riman çoxobrazlısıdır və onun $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasında ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikası təyin olunmuşdur.

Onda uyğun ${}^{CG}\nabla$ Levi-Çivita rabitəsi $\forall X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ üçün aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$ \begin{cases} {}^{CG}\nabla_{H_X}{}^{H}Y={}^{H}(\nabla_X Y)-\frac{1}{2}{}^{V}\left(R(X,Y)y\right), \\ {}^{CG}\nabla_{H_X}{}^{V}Y=\frac{1}{2\alpha}{}^{H}\left(R(y,Y)X\right)+{}^{V}(\nabla_X Y), \\ {}^{CG}\nabla_{V_X}{}^{H}Y=\frac{1}{2\alpha}{}^{H}\left(R(y,X)Y\right), \\ {}^{CG}\nabla_{V_X}{}^{V}Y=-\frac{1}{\alpha}\left({}^{CG}g\left({}^{V}X,\gamma\delta\right)^{V}Y+{}^{CG}g\left({}^{V}Y,\gamma\delta\right)^{V}X\right)+ \\ +\frac{1+\alpha}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right)\gamma\delta-\frac{1}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^{V}X,\gamma\delta\right)\,{}^{CG}g\left({}^{V}Y,\gamma\delta\right)\gamma\delta, \end{cases} \tag{4} $$

Burada R və $\gamma\partial$, uyğun olaraq, ∇ rabitəsinin əyrilik tenzorunun və $T(M_n)$ üzərində

$$\gamma\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{\bar{i}}\delta_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{\bar{j}} \end{pmatrix} = x^{\bar{j}}\partial_{\bar{j}} = x^{\bar{j}}e_{(\bar{j})},$$

komponentlərinə malik kanonik şaquli vektor meydanının işarələridir.

$T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasının $\{e_\alpha\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən,

$$^{CG}\nabla_{e_\alpha}e_\beta = {}^{CG}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}e_\gamma$$

ayrılışını yazaq, burada $^{CG}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ^{CG}g Çiger-Gromol metrikası üçün qurulmuş Kristoffel simvollarının işarəsidir.

İkinci fəslin beşinci yarımfəslində toxunan laylanma fəzalarıda Çiger-Gromol metrikalarının geodezik əyriləri araşdırılır.

Teorem 2. Tutaq ki, $\tilde{c}$ $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində əyridir və $\pi^{-1}(U)\subset T(M_n)$ ətrafında $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ doğrulmuş koordinatlarına nəzərən lokal olaraq $x^h = x^h(t), x^{\bar{h}} = y^h(t)$ şəklində ifadə olunmuşdur. Onda $\tilde{c}$ əyrisi o halda ^{CG}g metrikasının geodezik əyrisidir ki, aşağıdakı tənliklər ödənmiş olsun.

$$\begin{cases} (a)\ \dfrac{\delta^2 x^h}{dt^2} + \dfrac{1}{\alpha}R_{kji}^{h}y^k\dfrac{\delta y^j}{dt}\dfrac{dx^i}{dt} = 0, \\ (b)\ \dfrac{\delta^2 y^h}{dt^2} + \left[-\dfrac{1}{\alpha}\left(y_j\delta_i^h + y_i\delta_j^h\right) + \dfrac{1+\alpha}{\alpha}g_{ij}y^h - \dfrac{1}{\alpha}y_j y_i y^h\right]\dfrac{\delta y^j}{dt}\dfrac{\delta y^i}{dt} = 0, \end{cases}$$

burada $y^i = x^{\bar{i}}$.

Tutaq ki, $C = \pi\circ C^H$ M_n üzərində ∇ rabitəsinin geodezik əyrisidir. Onda $\dfrac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0$. Bu şərti və $\dfrac{\delta y^j}{dt} = \dfrac{\delta X^h}{dt} = 0$ şərtini nəzərə alsaq, aşağıdakı nəticəyə gələrik:

Teorem 3. M_n üzərindəki geodezik xəttin horizontal lifti həm də ^{CG}g metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində geodezik əyridir.

İndi isə fərz edək ki, $C = \pi \circ C^*$ M_n üzərində ∇ rabitəsinin geodezik əyrisidir, yəni

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = \frac{\delta}{dt}\left(\frac{dx^h}{dt}\right) = 0.$$

Digər tərəfdən, əyrinin horizontal liftinin tərifindən müəyyən edirik ki,

$$\frac{\delta^2 y^h}{dt^2} = \frac{\delta}{dt}\left(\frac{dx^h}{dt}\right) = 0. \tag{5}$$

Onda (3) və (5) tənliklərində asanlıqla görə bilərik ki, M_n üzərində $x^h = x^h(t)$ tənlikləri ilə təyin olunan əyrinin natural (təbii) lifti ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasında geodezik əyridir.

İkinci fəslin altıncı yarımfəslində toxunan laylanma fəzasında Riman metrikasının deformasiya olunmuş tam lifti araşdırılır.

Liftlərlə bağlı anlayış diferensial həndəsənin mühüm anlayışlarından biridir. Dual-holomorf $X_n(R(\varepsilon))$ çoxobrazlısı üzərindəki dual-holomorf obyektlərə toxunan laylanma fəzası üzərindəki diferensial-həndəsi obyektlərin öyrənilməsi toxunan laylanma fəzasında liftlərin yeni sinfini (deformasiya olunmuş tam liftlər) təyin etməyə imkan verir.

Əvvəlcə toxunan laylanma fəzasında funksiyaların deformasiya olunmuş tam liftlərini tədqiq olunur.

Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 4. Fərz edək ki, g M_n üzərində Rimann metrikasıdır, h isə $(0,2)$ tipli hər hansı simmetrik tenzor meydanıdır. Onda, bu halda ${}^{Def}g = {}^{C}g + {}^{V}h$ tenzoru $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində Riman metrikasıdır.

İkinci fəslin yeddinci yarımfəslində simplektik həndəsədə liftlərlə bağlı bəzi məsələlərə baxılır.

Riman həndəsəsində kanonik izomorfizm Riman çoxobrazlısının toxunan və kotoxunan laylanmaları arasında onların metrikalarının köməyi ilə qurulan izomorfizmdir. Simplektik çoxobrazlılar arasında da analoji izomorfizmlər vardır.

Baza çoxobrazlısında toxunan və kotoxunan laylanmalara tenzor meydanlarının davamları (liftləri) nəzəriyyəsi Yano və İşihara tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Bu yarımfəsildə əsas məqsəd simplektik kanonik izomorfizmlərin köməyi ilə liftlərin çevrilməsini öyrənməkdən ibarətdir.

Teorem 5. Tutaq ki, (M,ω) simplektik çoxobrazlıdır, ${}^{C}X_{T}$ və ${}^{C}X_{T^*}$ vektor meydanının uyğun olaraq, $T(M)$ toxunan laylanmasına və $T^*(M)$ kotoxunan laylanmasına tam liftləridir. Əgər X simplektik vektor meydanıdırsa, onda ${}^{C}X_{T}$ və ${}^{C}X_{T^*}$ ω^b- əlaqəlidirlər, yəni $\left(\omega^b\right)_* {}^{C}X_{T}={}^{C}X_{T^*}$.

İki simplektik çoxobrazlının $f:(M,\omega)\rightarrow(N,\omega')$ difeomorfizmi o halda simplektomorfizm adlanır ki, $f^*\omega'=\omega$ olsun, burada f^*- f difeomorfizminin geriyə çəkimidir.

Teorem 6. Tutaq ki, ω (M,ω) simplektik çoxobrazlısı üzərində $(1,2)$ tipli çəp-simmetrik S tenzor meydanına nəzərən təmiz simplektik 2-formadır və tutaq ki, ${}^{C}S_{TM}$ və ${}^{C}S_{T^*M}$ S tenzor meydanının, uyğun olaraq, toxunan və kotoxunan laylanmalara tam liftləridir. Əgər ω simplektik 2-forması

$$S_{ji}^{m}\partial_m\omega_{hs}-\left(\partial_j S_{hi}^{m}\right)\omega_{ms}-S_{hi}^{m}\partial_j\omega_{ms}-\left(\partial_i S_{jh}^{m}\right)\omega_{ms}-$$

$$-S_{jh}^{m}\partial_i\omega_{ms}+\omega_{ms}\partial_h S_{ji}^{m}+\omega_{hm}\partial_s S_{ji}^{m}=0$$

Yano-Ako tənliyini ödəyirsə, onda ${}^{C}S_{T^*M}$ tam lifti $\omega^{\#}:T^*(M)\rightarrow T(M)$ kanonik izomorfizm nəticəsində ${}^{C}S_{TM}$ tam liftinin çevrilməsidir.

Üçüncü fəsildə kotoxunan laylanma fəzalarında metrikalara baxılır.

Üçüncü fəslin birinci yarımfəslində kotoxunan laylanma fəzalarında Peterson mənada Riman genişlənməsinə baxılır, adaptə olunmuş (seçilmiş) reperdə onun Levi-Çivita rabitəsinin ifadəsi qurulur.

${}^{C}\nabla\, {}^{H}X$ və ${}^{C}\nabla^{V}\omega$ kovariant törəmələrinin adaptə olunmuş $\{\tilde{e}_\beta\}$ reperinə nəzərən, uyğun olaraq

$$\left({}^{C}\nabla_\gamma\, {}^{H}\tilde{X}^\alpha\right)=\begin{pmatrix} \nabla_k X^i & 0 \\ \frac{1}{2}p_a\left(R_{kji}{}^a - R_{jik}{}^a + R_{ikj}{}^a\right)X^i & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

və

$$\left({}^{C}\nabla_\gamma\, {}^{v}\tilde{\omega}^\alpha\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nabla_k \omega_i & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

komponentləri vardır.

İsbat edirik ki,

$$\left({}^{C}\nabla_\gamma\, {}^{C}\tilde{X}^\alpha\right)=\begin{pmatrix} \nabla_k X^i & 0 \\ -p_h\nabla_k\nabla_i X^h + \frac{1}{2}p_a\left(R_{kji}{}^a - R_{jik}{}^a + R_{ikj}{}^a\right)X^j & -\nabla_i X^k \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(7) münasibətindən aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır.

Teorem 7. $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ kovektor meydanının ${}^{R}\nabla$ metrikasına malik $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına şaquli liflinin paralel olması üçün zəruri və kafi şərt verilmiş ω kovektor meydanının ∇ rabitəsinə nəzərən paralel olmasıdır.

Əgər M_n çoxobrazlısı g psevdo-Riman metrikasına malikdirsə, onda

$$\begin{aligned} p_a R_{kji}{}^a X^j &= p_a X^j\left(R_{kjis}g^{sa}\right) = p_a X^j\left(R_{iskj}g^{sa}\right) = \\ &= p_a X^j\left(-R_{isjk}g^{sa}\right) = p_a X^j\left(-R_{isj}{}^t g_{tk} g^{sa}\right) = -p_a g_{tk} g^{sa}\nabla_{[i}\nabla_{s]}X^t \end{aligned} \tag{9}$$

bərabərliyinə əsasən (6) və (8) münasibətlərindən aşağıdakı teorem alınır:

Teorem 8. Əgər M_n psevdo-Riman g metrikasına və bu metrikanın ∇ Levi-Çivita rabitəsinə, $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası isə metrika olaraq ${}^R\nabla$ Riman genişlənməsinə malikdirlərsə, onda $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektor meydanının $\left(T^*(M_n), {}^R\nabla\right)$ kotoxunan laylanma fəzasına horizontal və tam liftlərinin paralel olmaları üçün zəruri və kafi şərt verilmiş X vektor meydanının ∇ Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən paralel olmasıdır.

Üçüncü fəslin ikinci yarımfəslində kotoxunan laylanma fəzalarıda Levi-Çivita olmayan metrik rabitələr və onların əyrilik tenzorlarının xassələri araşdırılır.

Üçüncü fəslin birinci yarımfəslində biz $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında ${}^R\nabla$ Riman genişlənməsini daxil etdik və ${}^R\nabla$ metrikasının ${}^C\nabla$ Levi-Çivita rabitəsinə baxmış olduq. Bu, ${}^C\nabla\left({}^R\nabla\right) = 0$ bərabərliyini ödəyən yeganə buruqluqsuz afin rabitədir. Lakin $\tilde{\nabla}\left({}^R\nabla\right) = 0$ bərabərliyini ödəyən və trivial olmayan buruqluq tenzoruna malik başqa rabitədə vardır. Bu rabitəni ${}^R\nabla$ metrikasının metrik rabitəsi adlandırırlar.

Teorem 9. ${}^H\nabla$ metrik rabitəsinə malik olan $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasının ${}^R\nabla$ metrikasına nəzərən sıfır skalyar əyriliyi vardır.

Üçüncü fəslin üçüncü yarımfəslində kotoxunan laylanma fəzalarıda Riman genişlənməsinə nəzərən vektor meydanlarının Killinqlik şərtləri və bu metrikanın Norden metrikası olması şərtlərinə baxılır.

g psevdo-Riman metrikasına malik M_n çoxobrazlısı üzərində $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektor meydanı o halda Killinq vektor meydanı (və ya infinitezimal izometriya) adlanır ki, $L_X g = 0$ münasibəti ödənilmiş olsun, burada L_X Li törəməsinin işarəsidir.

Teorem 10. ${}^{R}\nabla$ metrikasına malik kotoxunan laylanma fəzasında ${}^{V}\omega$ vektor meydanının Killinq vektor meydanı olması üçün zəruri və kafi şərt assosiasiya olunmuş $X^{i}=g^{ij}\omega_{j}$ vektor meydanının Killinq vektor meydanı olmasıdır.

Keler-Norden çoxobrazlısı sanki kompleks φ strukturu və $\nabla\varphi=0$ şərtini ödəyən g psevdo-Riman metrikası ilə təchiz edilmiş M_{2n} çoxobrazlısı ilə formalaşan (M_{2n},φ,g) üçlüyü şəklində təyin oluna bilər, burada ∇ g metrikasının Levi-Çivita rabitəsidir və nəzərdə tutulur ki, g Norden metrikasıdır.

g metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsi buruqluqsuz afin rabitə olduğuna görə alarıq:

Əgər $\Phi_{\varphi}g=0$ olarsa, onda φ inteqrallanandır. Beləliklə, $\Phi_{\varphi}g=0$ və $N_{\varphi}\neq 0$ şərtlərini ödəyən sanki Norden çoxobrazlısı, yəni sanki holomorf Norden çoxobrazlısı yoxdur.

Tutaq ki, X və ω $T^{*}(M_{2n})$ kotoxunan laylanmasında uyğun olaraq ixtiyari vektor və kovektor meydanlarıdır. Onda $T^{*}(M_{2n})$-də ${}^{H}\varphi$ üfqi (horizontal) lifti aşağıdaki şərtlərlə daxil edilir:

$${}^{H}\varphi({}^{V}\omega)={}^{V}(\omega\circ\varphi),\ \ {}^{H}\varphi({}^{H}X)={}^{H}(\varphi X).$$

Buradan çıxır ki, ${}^{H}\varphi$ üfqi lifti $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ seçilmiş reperində aşağıdakı komponentlərə malik olacaqdır:

$${}^{H}\varphi=(\tilde{\varphi}_{\beta}^{\alpha})=\begin{pmatrix}\varphi_{j}^{i} & 0\\ 0 & \varphi_{i}^{j}\end{pmatrix},$$

burada φ_{j}^{i}, φ -nin lokal koordinatlarıdır.

Məlumdur ki, əgər φ burulmasız ∇ rabitəsinə sahib olan M_{2n} çoxobrazlısı üzərində sanki kompleks strukturdursa, onda ${}^{H}\varphi$ lifti də $T^{*}(M_{2n})$ kotoxunan laylanmasında sanki kompleks struktur olur. Bu faktı istifadə etsək və ${}^{R}\nabla$ metrikasının ifadəsini istifadə etsək, göstərə bilirik ki,

$$ {}^{R}\nabla({}^{H}\varphi\tilde{X},\tilde{Y}) = {}^{R}\nabla(\tilde{X},{}^{H}\varphi\tilde{Y}), $$

burada $\tilde{X} = {}^{H}X, {}^{V}\omega$ və $\tilde{Y} = {}^{H}Y, {}^{V}\theta$ şəklində ixtiyari vektor və kovektor meydanlarıdır, yəni $(T^{*}(M_{2n}), {}^{R}\nabla, {}^{H}\varphi)$ üçlüyü sanki Norden çoxobrazlısıdır.

${}^{H}\varphi$ liftinin ${}^{R}\nabla$ metrikasının ${}^{C}\nabla$ Levi-Çivita rabitəsindəki kovariant törəmələrinin sıfırdan fərqli koordinatları aşağıdakı şəkildə olur:

$$ {}^{C}\nabla_{i}\,{}^{H}\tilde{\varphi}_{j}^{k} = \nabla_{i}\varphi_{j}^{k}, \quad {}^{C}\nabla_{i}\,{}^{H}\tilde{\varphi}_{\bar{j}}^{\bar{k}} = \nabla_{i}\varphi_{j}^{k}, $$

$$ {}^{C}\nabla_{i}\,{}^{H}\tilde{\varphi}_{j}^{\bar{k}} = \frac{1}{2}p_{a}[(R_{imk}{}^{a} - R_{imk}{}^{a} + R_{kim}{}^{a})\varphi_{j}^{m} - (R_{ijm}{}^{a} - R_{jmi}{}^{a} + R_{mij}{}^{a})\varphi_{k}^{m}] $$

Əgər burulmasız ∇ rabitəsi φ -strukturu qoruyursa $(\nabla\varphi = 0)$ və

$$ \nabla_{\varphi X}Y = \varphi(\nabla_{X}Y) $$

şərtini ödəyirsə, onda ∇ rabitəsinə holomorf rabitə deyilir. ∇ rabitəsinin əgrilik tenzorunun təmizlik şərtinin bu rabitənin holomorf olması üçün zəruri və kafi şərt olduğunu nəzərə alsaq, yuxarıdakı ${}^{H}\varphi$ lifti üçün kovariant törəmə düsturlarından aşağıdakı teoremi alırıq:

Teorem 11. Əgər burulmasız ∇ rabitəsi φ sanki kompleks strukturuna görə holomorf olarsa, onda $T^{*}(M_{2n})$ kotoxunan laylanması ${}^{R}\nabla$ metrikasına və ${}^{H}\varphi$ sanki kompleks struktura görə Keler-Norden çoxobrazlısıdır.

Digər tərəfdən Norden metrikasının əyrilik tenzoru Keler-Norden çoxobrazlısında təmiz tenzor olduğunu nəzərə alsaq, g Keler-Norden metrikasına və onun ∇ rabitəsinə sahib olan M_{2n} çoxobrazlısının ${}^{R}\nabla$-Riman genişləmə metrikalı $T^{*}(M_{2n})$ kotoxunan laylanması üçün aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 12. Əgər (M_{2n}, g, φ) üçlüyü Keler-Norden çoxobrazlısı olarsa, onda (M_{2n}, g) psevdo-Riman çoxobrazlısının $T^{*}(M_{2n})$

kotoxunan laylanması ${}^{R}\nabla$ metrikasına və ${}^{H}\varphi$ lift strukturuna görə Keler-Norden çoxobrazlısı olur.

Üçüncü fəslin dördüncü yarımfəslində kotoxunan laylanma fəzası üzərində yeni metrika təyin olunur, onun Levi-Çivita rabitəsinə baxılır.

Tutaq ki, $\tilde{G}$ tenzoru $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında aşağıdakı şəkildə təyin olunmuş yeni bir metrikadır:

$$\tilde{G} = dx^i \delta p_i + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \delta p_i \delta p_j .$$

Aşağıdakı teoremlərin doğruluğu göstərilir.

Teorem 13. Əgər X,Y M_n üzərində paralel vektor meydanlarıdırsa, onda $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində X,Y vektor meydanlarının tam liftləri $\tilde{G}$ metrikasına nəzərən ortoqonaldırlar.

Teorem 14. $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ kovektor meydanının $\tilde{G}$ metrikasına malik $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına şaquli lifti heç bir halda paralel deyildir.

Teorem 15. $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektor meydanının $\tilde{G}$ metrikasına malik $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına tam və horizontal liftləri onda və yalnız onda paralel olurlar ki, M_n üzərində X $\nabla-$ ya nəzərən paralel olsun.

Üçüncü fəslin beşinci yarımfəslində kotoxunan laylanma fəzası üzərində yeni metrikaya nəzərən metrik rabitə və geodezik əyrilər araşdırılır.

$T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində $\tilde{G}$ metrikasının $\tilde{\nabla}$ Levi-Çivita rabitəsi $\tilde{\nabla}\tilde{G} = 0$ şərtini ödəyən yeganə buruqluqsuz rabitədir. Lakin biz $\tilde{\nabla}\tilde{G} = 0$ şərtini ödəyən və qeyri-trivial buruqluq tenzoruna malik olan digər rabitəni də tapacağıq. Həmin rabitəyə $\widetilde{G}$ metrikasının metrik rabitəsi deyilir.

Beləliklə bu yarımfəsildə aşağıdakı teoremlərin doğruluğu göstərilir.

Teorem 16. ${}^{H}\nabla$ metrik rabitəsinə malik olan $\left(T^{*}(M_n),\widetilde{G}\right)$ kotoxunan laylanma fəzasının metrik rabitəyə nəzərən ${}^{H}r$ skalyar əyriliyi onda sıfra bərabər olur ki, M_n üzərində $\nabla_g -$ nin r skalyar əyriliyi sıfır olsun.

Teorem 17. Tutaq ki, $\widetilde{C}$ $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right)=\left(x^i, p_i\right)$ doğrulmuş koordinatlarına nəzərən lokal olaraq $x^h = x^h(t),\ \ p_h = \vartheta_h(t)$ şəklində ifadə olunmuşdur. Onda $\widetilde{C}$ əyrisi aşağıdakı tənlikləri ödədikdə $\widetilde{G}$ metrikasının geodezik əyrisidir.

$$a)\quad \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} - \Gamma_{it}^{j} g^{th}\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta p_j}{dt}=0,$$

$$b)\quad \frac{\delta^2 p^h}{dt^2} + p_m R_{hji}{}^{m}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} + p_m R_{hit}{}^{s} g^{tj}\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta p_j}{dt}=0.$$

Üçüncü fəslin altıncı yarımfəslində $(0,2)$ tipli tenzor laylanmasında Sasaki metrikasının Levi-Çivita rabitəsinə baxılır.

$T_2^0(M)$ laylanmasında Sasaki metrikası ixtiyari $X,Y\in\Im_0^1(M)$ və $A,B\in\Im_2^0(M)$ üçün

$$ {}^{S}g\left({}^{V}A,{}^{V}B\right)={}^{V}\left(G(A,B)\right), $$
$$ {}^{S}g\left({}^{V}A,{}^{H}Y\right)=0, $$
$$ {}^{S}g\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)={}^{V}\left(g(X,Y)\right) $$

bərabərlikləri ilə təyin olunur.

Teorem 18. Tutaq ki, (M,g) Riman çoxobrazlısıdır və ${}^S\nabla - {}^S g$ Sasaki metrikasına malik $T_2^0(M)$ laylanmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda müxtəlif indekslər üçün ${}^S\Gamma_{IJ}^K$ komponentlərinin qiymətləri aşağıdakı düsturları ilə hesablanırlar:

$$
\begin{aligned}
&{}^s\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k,\ {}^s\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^k = {}^s\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = {}^s\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = 0,\\
&{}^s\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\left(R_{ijk_1}^m t_{mk_2} + R_{ijk_2}^m t_{k_1m}\right),\\
&{}^s\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = -\Gamma_{ik_1}^{j_1}\delta_{k_2}^{j_2} - \Gamma_{ik_2}^{j_2}\delta_{k_1}^{j_1},\\
&{}^s\Gamma_{\bar{i}j}^{k} = \frac{1}{2}\left(g^{ai_2} t_{sa} R_{.j.}^{ki_1s} + g^{bi_1} t_{bs} R_{.j.}^{ki_2s}\right),\\
&{}^s\Gamma_{i\bar{j}}^{k} = \frac{1}{2}\left(g^{aj_2} t_{sa} R_{.i.}^{kj_1s} + g^{bj_1} t_{bs} R_{.i.}^{kj_2s}\right),
\end{aligned}
$$

burada $R_{.i.}^{kjs} = g^{kl} g^{jm} R_{\lim}{}^{s}$.

Bildiyimiz kimi, g Riman metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsi bütün $X,Y,Z \in \Im_0^1(M)$ vektor meydanları üçün aşağıdakı Koszul düsturu ilə verilir:

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) +\\
&+ g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y).
\end{aligned}
$$

Beləliklə aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

Teorem 19. Tutaq ki, (M,g) Riman çoxobrazlısıdır və ${}^S\nabla - {}^S g$ Sasaki metrikasına malik $T_2^0(M)$ laylanmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda ${}^S\nabla$ Levi-Çivita rabitəsi bütün $X,Y,Z \in \Im_0^1(M)$, və $A,B \in \Im_2^0(M)$ üçün aşağıdakı münasibətləri ödəyir:

$$
i)\quad {}^S\nabla_{{}^H X}{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma})R(X,Y),
$$

$ii)\quad {}^{S}\nabla_{{}^{V}A}{}^{H}Y = \frac{1}{2}{}^{H}\left(tg^{-1} \circ R(\ ,Y)\tilde{A} + \bar{t}g^{-1} \circ R(\ ,Y)\tilde{A}\right),$

$iii)\quad {}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y = {}^{H}(\nabla_X B) + \frac{1}{2}\left(tg^{-1} \circ R(\ ,X)\tilde{B} + \bar{t}g^{-1} \circ R(\ ,X)\tilde{B}\right),$

$iv)\quad {}^{S}\nabla_{{}^{V}A}{}^{V}B = 0,$

burada $\tilde{A} + g^{i_1 l} g^{i_2 m} A_{lm} = \left(A^{i_1 i_2}\right) \in \Im_0^2(M),$

$R(\ .Y)\tilde{A} \in T_1^2(M), g^{-1} \circ R(\ ,Y)\tilde{A} \in \Im_0^3(M).$

NƏTİCƏ

1. Çiger-Gromol metrikalarının geodezik əyrilərinin toxunan laylanma fəzalarında interpretasiyaları verilmişdir;
2. Toxunan laylanma fəzasında simplektik metrikanın tam liftinin kanonik simplektik inikas zamanı kotoxunan laylanma fəzasının təbii simplektik metrikasına çevrildiyi göstərilmişdir;
3. Kanonik simplektik inikas zamanı vektor, affinor və (1,2) tipli tenzor meydanlarının tam liftlərinin obrazlarının yenidən tam liftlər olmaları üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;
4. Kotoxunan laylanmalardakı Peterson mənasında genişlənmiş Riman metrikalarına görə vektor meydanlarının Killinq vektoru olması şərtləri verilmiş, onların Norden metrikası olması şərtləri tapılmışdır.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Kazımova, S.F. Kotoxunan laylanma fəzasında Riman metrikasına dair // Əməkdar elm xadimi, akademik Ə.T. Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş Elmi Konfransın tezisləri. –Bakı: -2007, -s. 81-82.
2. Салимов, А.А., Казимова, С.Ф. Геодезические линии метрики Чигера-Громолла в касательном расслоении // “Riyazi nəzəriyyələr, onların tətbiqi və tədrisi sahəsində olan problemlər” adlı Beynəlxalq Elmi Konfrans, -Gəncə: -2008, -s. 94-95.
3. Kazımova, S.F. (2, 0) tipli tenzor laylaşmasında təbii metrikaya dair // Azərbaycanın Ümumilli Lideri Heydər Əliyevin 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Tələbə, Magistrant və gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi Konfransının tezisləri. –Bakı: -2008, -s. 25-26.
4. Salimov, A.A., Kazimova, S.F. Geodesics of the Cheeger-Gromoll metric // Turk. J. Math., -2009, -v. 33, -pp. 99-105(**SCI-Expanded**).
5. Aslanci, S., Kazimova, S.F., Salimov, A.A. Some notes concerning Riemannian extensions // Ukrainian Math. J., -2010, -v. 62, -№5, -pp. 661-675(**SCI-Expanded**).
6. Kazımova, S.F. Kotoxunan laylanma fəzasında Riman genişlənməsi və onun bəzi tətbiqləri // Azərbaycan xalqının Ümumilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 91 illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı Respublika Elmi Konfransı. –Bakı: -2014, -12-13 may, -s. 89-92.
7. Фаттаев, Г.Д., Казимова, С.Ф. Риманова метрика в расслоении тензоров типа (1,2) над Римановым многообразием // Bakı Dövlət Universitetinin 95-ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri” mövzusunda Elmi Konfransının materialları, -Bakı: -2014,-25-26 dekabr, -s. 49-50.

8. Fəttayev, H.D., Kazımova, S.F. $T_0^3(M)$ laylanması üzərində Riman metrikası və Riman rabitəsi // Azərbaycanın görkəmli alimi və ictimai xadimi, Dövlət mükafatı laureatı, Əməkdar elm xadimi, BDU-nun sabiq rektoru, AMEA-nın müxbir üzvü, professor Y.C.Məmmədovun anadan olmasının 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynlxalq Elmi Konfransının materialları, -Bakı: -2015, -s. 68-71.
9. Fəttayev, H.D., Kazımova, S.F. Riman çoxobrazlısı üzərində (2,1) tipli tenzorların laylanma fəzasında Riman metrikasına dair // Azərbaycan xalqının Ümumilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika Elmi Konfransının materialları,-Bakı: -2015,-20-21 may, -s. 30-32.
10. Фаттаев, Г.Д., Казымова, С.Ф. Риманова метрика в расслоении тензоров типа (1,2) над Римановым многообразием // Вестник Бакинского ун-та, серия физ.-мат. наук, -2017, -№3, -с.58-65.
11. Ocak, F., Kazimova, S.F. On a new metric in the cotangent bundle // Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, Series of Phus. – Techn. and Math. Sciences, -2018, -v. 38, -№1, -pp. 128-132.
12. Salimov, A.A., Asl, M.B., Kazimova, S.F. Problems of lifts in symplectic geometry // Chin. Ann. Math., Ser.B, -2019, -v. 40, -№3, -pp. 321-330 (**SCI-Expanded**).
13. Kazimova, S.F. Holomorphic manifolds with deformed lifts of Riemannian metrics // Jour. of Baku Energ. Univer. -2019, -v. 3(1), -pp. 63-68.
14. Казымова, С.Ф. О связности Леви-Чивита метрики Сасаки в тензорном расслоении типа (0,2) // Науч. и педог. извес. Унив. Одлар Юрду, -2019, -№52, -с. 12-19.
15. Salimov, A.A., Kazımova, S.F. Some notes on lifts in symplectic geometry // Abstracts of the İnternational Conference Modern Problems of Geometry and Topology and their Applications, -Tashkent, Uzbekistan: -2019, -pp. 20.

Dissertasiyanın müdafiəsi **14 dekabr 2021-**ci il tarixində saat **12^{00}-**da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən BFD 2.17 birdəfəlik Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küç., 23

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya işi və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **11 noyabr 2021**-ci il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 19.10.21
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 36120
Tiraj: 100