АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФРЕЙМОВЫХ СИСТЕМ, ПОРОЖДЕННЫХ БИЛИНЕЙНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность: 1202.01 – Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Мигдад Имдад оглы Исмайлов**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук

Баку – 2021

Диссертационная работа выполнена на отделе «Негармонический анализ» Института Математики и Механики НАНА Азербайджана и на кафедре «Теория функций и функциональный анализ» Бакинского Государственного Университета.

Научные консультанты: чл.–корр. НАНА, профессор **Билал Тельман оглы Билалов**
профессор **Аскар Рагими**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Низамеддин Ширин оглы Искендеров
доктор физико-математических наук, профессор
Алик Малик оглы Наджафов
доктор математических наук, доцент
Тельман Бенсер оглы Касумов
доктор математических наук, доцент
Мубариз Гафаршах оглы Гаджибеков

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, профессор
________________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета:

к.ф.–м.н.
________________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

член–корр. НАНА, профессор
________________ **Билал Тельман оглы Билалов**

Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu
Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Бесселевость и гильбертовость пары биортогональных последовательностей и базисы Рисса в пространстве L_2 были введены и изучены в 1951 году Н.К.Бари[1]. В дальнейшем эти понятия были обобщены на банаховы пространства в различных направлениях в работах Б.Е.Вейца, З.А.Чантурия, I.Singer, Б.Т.Билалова и З.Г.Гусейнова, П.А.Терехина. Обобщения этих понятий в случае пространства последовательностей векторов, а также в несепарабельных банаховых пространствах не были изучены. В первой главе диссертационной работы даются понятия бесселевых, гильбертовых последовательностей и базисов Рисса в банаховых и гильбертовых пространствах, ассоциированных билинейными отображениями, а также их несчетные обобщения в несепарабельных банаховых пространствах, приведены примеры.

Базисы Рисса являются частными случаями фреймов в гильбертовых пространствах введенные в 1952 году R.J.Duffin и A.C.Schaeffer[2]. Бурное развитие теории фреймов началось во второй половине 80-х годов после основопологающих работ И.Добеши, И.Добеши, А.Гросмана и И.Мейера, С.Малата и др. Обобщения фреймов в гильбертовых пространствах относительно систем линейных ограниченных операторов изучалась W.Sun. Другими обобщениями фреймов в гильбертовых пространствах являются непрерывные фреймы в гильбертовых пространствах, изученные в работах S.T.Ali, J.P.Antoine и J.P.Gazeau, A.Rahimi, A.Najati и Y.N.Dehghan. Понятия банахова фрейма и атомарного разложения в банахо-

---

[1]Бари, Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // – Москва: Ученые записки МГУ, – 1951, 4:148. – с. 69–107.

[2]Duffin, R.J., Schaeffer, A.C. A class of nonharmonic Fourier series // – Washington: Transactions of American Mathematical Society, – 1952. 72, – p. 341–366.

вых пространствах были введены и изучены H.G.Feichtinger и K.Gröchenig. Фреймы в банаховых пространствах также изучались в работах O.Christensen, P.G.Casazza, D.Han, D.Larson, Б.Т.Билалова, M.R.Abdollahpour, M.H.Faroughi и A.Rahimi, O.Christensen и D.T.Stoeva. Исходя из того факта, что произведение скаляра на вектор определяет билинейное отображение, представляет интерес изучения фреймов, а также вопросов устойчивости и возмущения базисов в гильбертовых и банаховых пространствах, ассоциированных билинейными отображениями. Вторая и третья глава диссертационной работы посвящена изучению этих вопросов.

Теория рядов Фурье является одним из основных направлений гармонического анализа. Важным направлением этой теории является изучение различных свойств коэффициентов Фурье. В этом контексте известна теорема Хаусдорфа-Юнга и теорема Харди-Литтлвуда. Эти факты для общих ортогональных и равномерно ограниченных систем в пространствах L_p изучались в работах Ф.Рисса и Пэли[3]. Многие задачи теории уравнений в частных производных, механики, математической физики, и других областей математики решаются методом Фурье. В этом направлении известны работы К.И.Худавердиева, К.И.Худавердиева и А.А.Велиева A.Ashyralyev, D.Arjmand, M.Kudu, I.Amirali, J.Nagumo, S.Arimoto, S.Yoshizawa и др. Представляет интерес изучения свойств коэффициентов Фурье с векторнозначными коэффициентами. В четвертой главе диссертационной работы получены аналоги теорем Рисса и Пэли в Лебеговых пространствах и в Лебеговых пространствах с переменным показателем суммируемости со смешанной нормой.

Одним из важных вопросов спектральной теории дифференциальных операторов является изучение спектральных задач со спектральным параметром в граничных условиях. Основополагающими результатами в этом направлении являются работы авторов Л.Релей, Ж.Д.Тамаркин, Р.Е.Лангер, Л.Колатц и др. Спектральные свойства спектральных задач со спектральным параметром в граничных условиях рассматривались в работах J.Walter, A.Schneider, C.T.Fulton, D.B.Hinton, Г.М.Гусейнова и др. Общая теория краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка, когда спектральный параметр входит в краевые условия полиномиально была построена в работе А.А.Шкаликова. В работах Е.И.Моисеева и Н.Ю.Капустина для задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром входящее в граничные условия линейно, рассматривались вопросы базисности систем из собственных функций в лебеговых пространствах. Различные обобщения в этом направлении изучались в работах Н.Б.Керимова и З.С.Алиева, Н.Б.Керимова и В.С.Мирзоева и др. В абстрактном виде вопрос дефектной базисности рассматривался в работе Б.Т.Билалова и Т.Р.Мурадова. В работе Т.Б.Касумова в абстрактной постановке найден критерий относительно дефектной базисности систем в банаховых пространствах.

Наряду с этим следует отметить, что разрывные спектральные задачи со спектральным параметром в граничных условиях с точки зрения приложений тоже имеют отдельный научный интерес. По поводу касающихся вопросов можно рассмотреть, например, монографии Ф.Б.Аткинсона, Л.Коллатца и М.А.Расулова. Спектральная задача, ассоциированная с задачей колебания нагруженной струны в лебеговых пространствах L_p изучалась в работах Т.Б.Касумова и Ш.Дж.Маммедова, Т.Б.Касумова и А.А.Гусейнли, Б.Т.Билалова, Т.Б.Касумова и Г.В.Магеррамова, а в весовых лебеговых пространствах со степенным весом в работе Т.Б.Касумова, А.М.Ахтямова и Н.Р.Ахмедзаде. Следует отметить, что вопросы базисности систем из собственных функций даже в весовых пространствах Лебега с общим весом, повидимому, не изучены. В пятой главе диссертационной работы эта же задача рассматривается в пространствах гранд Лебега и в весовых пространствах гранд Лебега с общим весом.

Один из методов изучения базисных свойств систем является метод возмущения и устойчивости. Поэтому изучение базисных свойств возмущенных систем экспонент в различных пространствах представляет особый научный интерес. Отметим, что базисность возмущенной системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов изучалась в работах А.М.Седлецкого, Г.Г.Девдариани, Е.И.Моисеева, К.И.Бабенко, В.Ф.Гапошкина, А.Н.Барменкова, А.Н.Барменкова и Ю.А.Казьмина, Ю.И.Любарского, Ю.И.Любарского и В.А.Ткаченко, Б.Т.Билалова и др. Во многих из этих работ вопрос полноты и минимальности систем сводится к разрешимости в классах Харди различных краевых задач Римана. Отметим, что задача Римана в пространствах Лебега с переменным показателем была изучена в работе B.T.Bilalov и Z.G.Guseynov, а в пространствах Морри в работе B.T.Bilalov, T.B.Gasymov и A.A.Guliyeva. В работе V.M.Kokilashvili, A.Meskhi, V.Paatashvili краевая задача была изучена в подпространстве пространства гранд Лебега функций представимых по формуле Коши. Базисность возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега и краевая задача в пространствах гранд Харди в общей постановке не рассматривалась. Изучение базисности возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега методом краевых задач требует определения классов гранд Харди и разрешимости в них краевых задач Римана. Шестая глава диссертационной работы посвящена изучению этих вопросов. По вышеизложенным соображениям считаем, что тема диссертационной работы является актуальной и представляет особый научный интерес.

Предмет и объекты исследования. Предметом и объектами изучения в диссертационной работе являются: бесселевы, гильбертовы системы, базисы Рисса и фреймы в гильбертовых и банаховых пространствах, ассоциированные билинейными отображениями относительно банахова пространства последовательностей векторов, теоремы Рисса и Пэли в пространствах Лебега и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости со смешанной нормой, подпространства $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига, разрывной дифференциальный оператор, классы гранд Харди, разрешимость задач Римана в классах гранд Харди, возмущенная система экспонент.

Цель и задачи исследования. Основной целью и задачей диссертационной работы является получение различных аналогов и обобщений бесселевых, гильбертовых систем, базисов Рисса и фреймов в гильбертовых и банаховых пространствах, получение аналогов теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости, изучение базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига, получение аналогов теорем Коровкина и их статистических вариантов в пространствах $G_{p)}$, вопросы базисности системы из собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в $G_{p)}$ и в их весовых вариантах с весом общего вида, определение классов гранд Харди, получение аналогов некоторых классических фактов и вопросы разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди, а также вопросы базисности возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега.

Методы исследования. В диссертации были использованы методы теории функционального анализа, теории фреймов, теории базисов, теории рядов Фурье, теории функций, теории гармонического и комплексного анализов, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории краевых задач для аналитических функций.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные положения:

1. характеризация бесселевых, гильбертовых систем, базисов Рисса и фреймов в гильбертовых и банаховых пространствах, ассоциированных билинейными отображениями.

2. несчетные обобщения бесселевых и гильбертовых систем в несепарабельных банаховых пространствах;

3. возмущения и устойчивости базисов и фреймов, ассоциированных билинейными отображениями;

4. получение аналогов и обобщений теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости со смешанной нормой;

5. вопросы существования и единственности обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ (q, p - сопряженные числа), $p \geq 2$;

6. вопросы базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига;

7. вопросы базисности системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в $G_{p)}$ и в их весовых вариантах с весом общего вида;

8. получение аналогов теорем Коровкина и их статистических вариантов в $G_{p)}$;

9. определение классов гранд Харди, получение аналогов теорем Рисса, Смирнова, теоремы о представление функции по формуле Коши и изучение вопроса разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди;

10. установление базисных свойств возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. введены понятия b-бесселевых, b-гильбертовых последовательностей, b-базисов Рисса и b-фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах относительно банаховых пространств последовательностей векторов, обобщающие классические понятия и изучены их характеризации;

2. введены понятия несчетного безусловного базиса, несчетных бесселевых и гильбертовых систем в несепарабельных банаховых пространствах и доказаны аналоги классических результатов в этом случае, а также приведены соответствующие примеры;

3. получены обобщения теорем возмущения и устойчивости базисов и фреймов относительно b-базисов и b-фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах;

4. найдены аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости, с помощью которых установлено существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ (q,p - сопряженные числа), $p \geq 2$;

5. доказаны базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига;

6. доказана базисность системы собственных функций дифференциального оператора одной разрывной спектральной задачи в прямой сумме пространств $G_{p)} \oplus C$, где C – комплексная плоскость;

7. доказана ограниченность сингулярного оператора в весовом пространстве $G_{p),\rho}$ в случае, когда весовая функция удовлетворяет условию Макенхоупта;

8. доказана базисность системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в весовом пространстве $G_{p),\rho}$ с весом общего вида;

9. определены классы гранд Харди $H_{p)}$, установлены аналоги теорем Рисса, Смирнова, теоремы о представление функции по формуле Коши и изучены вопросы разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди;

10. полученные результаты применены к установлению базисности системы экспонент с линейной фазой в подпространствах гранд Лебега $G_{p)}$.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов, в теории уравнений в частных производных, в теории аппроксимации, в теории фреймов и близких базисов, в гармоническом анализе.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации докладывались на общеинститутском семинаре ИММ НАН Азербайджана (рук. член–корр. НАНА, проф. М.Дж.Марданов), на семинарах отделов ИММ НАН Азербайджана «Негармонический анализ» (рук. чл.-корр. НАНА, проф. Б.Т.Билалов), «Дифференциальные уравнения» (рук. проф. А.Б.Алиев), на общефакультетском семинаре Механико-математического факультета БГУ (рук. проф. Н.Ш.Искендеров), на семинаре кафедры «Теория функций и функционального анализа» БГУ (рук. проф. А.М.Ахмедов), на семинаре кафедры «Математический анализ» БГУ (рук. проф. С.С.Мирзоев), на семинаре кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения» БГУ (рук. доц. Я.Т.Мегралиев), на Международной конференции, посвященной 85-летию проф. Я.Дж.Мамедова (Баку, 2015 г.), на 12-й Международной конференции по математике и механике, посвященной 80-летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова (Баку, 2010 г.), на

Международной конференции, посвященной 80-летнему юбилею академика НАНА А.Д.Гаджиева (Баку, 2017 г.), на Международной конференции «Функциональный анализ и его приложения», посвященной 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова (Баку, 2011 г.), на Международной конференции «Теория функций и проблемы гармонического анализа», посвященной 100-летнему юбилею академика И.И.Ибрагимова (Баку, 2012 г.), на 19-й Саратовской зимней школе «Современные проблемы Теории функций и их приложения» посвященной 90-летию со дня рождения П.Л.Ульянова (Саратов, 2018 г.), на Международной конференции «Операторы, функции и системы в математической физике», посвященной 70-летию проф. Г.А.Исаханлы (Баку, 2018 г.), на Международной конференции Workshop «Негармонический анализ и дифференциальные уравнения» (Баку 2016 г.), на 2-ой Международной конференции “Mathematical advances and applications” (Istanbul, 2019).

Личный вклад автора заключается в формулировке цели и выборе направления исследования. Кроме того, все выводы и полученные результаты, а также методы исследования принадлежат лично автору.

Публикации автора. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Призидента Азербайджанской Республики – 26, материалы конференций – 8, тезисы докладов – 2. Из них 12 статей опубликованы в журналах базы Web of Science и 1 статья в журнале базы Scopus, имеющие импакт-фактор.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена на отделе «Негармонический анализ» Института Математики и Механики НАНА Азербайджана и на кафедре «Теория функций и функциональный анализ» Бакинского Государственного Университета.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности).

Общий объем диссертационной работы – 453739 знаков (титульная страница – 424 знаков, оглавление – 3315 знаков, введение – 86000 знаков, первая глава – 82000 знаков, вторая глава – 24000 знаков, третья глава – 74000 знаков, четвертая глава – 48000 знаков, пятая глава – 78000 знаков, шестая глава – 58000 знаков). Список используемой литературы состоит из 227 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, шести глав и списка используемой литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приводится краткий обзор касающихся вопросов и излагаются основные результаты диссертации.

Глава I посвящена обобщению бесселевых, гильбертовых последовательностей и базисов Рисса в гильбертовых пространствах при билинейных отображениях. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [1-3, 6, 8, 11, 22-25, 29].

В параграфе 1.1 приведены стандартные обозначения, основные понятия теории базисов при билинейных отображениях, а также некоторые факты относительно банахова пространства последовательностей векторов.

Пусть X, Y и Z - банаховы пространства. Рассмотрим билинейное отображение $b: X \times Y \to Z$, удовлетворяющее условию

$$\exists M, m > 0: \ m\|x\|_X \|y\|_Y \le \|b(x,y)\|_Z \le M\|x\|_X \|y\|_Y, \ x \in X, \ y \in Y.$$

Пусть $\hat{X}$ - некоторое банахово пространство последовательностей $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}$, $x_n \in X$, с покоординатными линейными операциями. $\hat{X}$ назовем KB-пространством, если линейные операторы $\hat{e}_n : X \to \hat{X}$, $\hat{e}_n(x) = \{\delta_{in} x\}_{i\in N}$, $e_n : \hat{X} \to \hat{X}$,

$e_n(\hat{x}) = \{\delta_{in} x_n\}_{i\in N}$, $\hat{\delta}_n : \hat{X} \to X$, $\hat{\delta}_n(\hat{x}) = x_n$, $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$, $x \in X$, ограничены. $\hat{X}$ назовем CB-пространством, если подпространства $E_k = \{\hat{x} \in \hat{X} : x_n = 0, n \neq k\}$ образуют базис в $\hat{X}$.

Относительно пространства $\hat{X}^*$ справедлива

Лемма 1. *Пусть $\hat{X}$ - рефлексивное CB-пространство. Тогда сопряженное пространство $\hat{X}^*$ является CB-пространством.*

В параграфе 1.2 посредством билинейного отображения даются обобщения понятий бесселевых и гильбертовых последовательностей в гильбертовых пространствах, и доказываются их соответствующие свойства.

Пусть X, H - гильбертовы пространства, $\hat{X}$ - CB-пространство и билинейное отображение $\omega_b : H \times Y \to X$ определяется соотношением:

$$(b(x,y),h)_H = (x,\omega_b(h,y))_X,\ x \in X,\ h \in H,\ y \in Y.$$

В частности, при $X = C$, $Y = H$ и $b(\lambda, y) = \lambda y$ имеем $\omega_b(h,y) = (h,y)_H$.

Определение 1. *Системы $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-биортогональными в H, если $\forall x \in X$*

$$\omega_b(b(x,y_k),y_n^*) = \delta_{nk} x,\ \forall n,k \in N.$$

Пусть даны b-биортогональные в H системы $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset Y$.

Определение 2. *Систему $\{y_n\}_{n\in N}$ назовем b-бесселевой ($b_{\hat{X}}$-бесселевой) в H относительно пространства $\hat{X}$, если $\{\omega_b(h,y_n^*)\}_{n\in N} \in \hat{X}$ при любом $h \in H$.*

Имеет место следующий критерий $b_{\hat{X}}$-бесселевости.

Теорема 1. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* H *необходимо, а в случае* b*-полноты* $\{y_n\}_{n\in N}$*, и достаточно существование оператора* $T\in L(H,\hat{X})$*:*

$$T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N},\ x\in X,\ n\in N.$$

Определение 3. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* b*-гильбертовой (*$b_{\hat{X}}$*- гильбертовой) в* H *относительно* $\hat{X}$*, если*

$$\forall\hat{x}\in\hat{X},\ \exists h\in H:\{\omega_b(h,y_n^*)\}_{n\in N}=\hat{x}.$$

Имеет место следующий критерий $b_{\hat{X}}$-гильбертовости.

Теорема 2. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-гильбертовой в* H *достаточно, а в случае* b*-полноты* $\{y_n^*\}_{n\in N}$*, и необходимо, чтобы существовал оператор* $T\in L(\hat{X},H)$*:*

$$T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N})=b(x,y_n),\ x\in X,\ n\in N.$$

В следующей теореме устанавливается связь между $b_{\hat{X}}$-бесселевостью и $b_{\hat{X}}$-гильбертовостью систем.

Теорема 3. *Пусть системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ b*-полны в* H*. Система* $\{y_n\}_{n\in N}$ $b_{\hat{X}}$*-гильбертова в* H *тогда и только тогда, когда система* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ $b_{\hat{X}^*}$*-бесселева в* H*.*

В параграфе 1.3 при помощи билинейных отображений обобщаются базисы Рисса в гильбертовых пространствах, и устанавливаются соответствующие их связи с бесселевыми и гильбертовыми системами.

Определение 4. b*-базис* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* $b_{\hat{X}}$*-базисом Рисса, если его пространство коэффициентов совпадает с* $\hat{X}$ *.*

Пусть $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N}\subset Y$ - пара b-биортогональных систем.

Справедлив следующий критерий $b_{\hat{X}}$-базисности Рисса.

Теорема 4. *Пусть* $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ b*-полны в* H. *Для того, чтобы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-базисом Рисса в* H, *необходимо и достаточно, чтобы существовал ограниченно обратимый оператор* $T\in L(H,\hat{X})$:

$$T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N},\ x\in X, n\in N.$$

В параграфе 1.4 исходя из билинейных отображений определяются понятия бесселевых и гильбертовых систем в банаховых пространствах.

Пусть $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z,X)$ - b-биортогональные системы.

Определение 5. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* b*-бесселевой в* Z *относительно* $\hat{X}$ *(*$b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* Z*), если*

$$\forall z\in Z\ \ \{y_n^*(z)\}_{n\in N}\in\hat{X}.$$

Имеет место следующий критерий $b_{\hat{X}}$-бесселевости.

Теорема 5. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* Z *необходимо, а в случае* b*-полноты системы* $\{y_n\}_{n\in N}$, *и достаточно существование оператора* $T\in L(Z,\hat{X})$:

$$T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N},\ x\in X,\ n\in N.$$

Определение 6. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* b*-гильбертовой в* Z *относительно* $\hat{X}$ *(*$b_{\hat{X}}$*-гильбертовой в* Z*), если* $\forall\hat{x}\in\hat{X}$ $\exists z\in Z$: $\{y_n^*(z)\}_{n\in N}=\hat{x}$.

Справедлив следующий критерий $b_{\hat{X}}$-гильбертовости.

Теорема 6. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-гильбертовой в* Z *достаточно, а в случае полноты системы* $\{y_n^*\}_{n\in N}$, *и необходимо существование оператора* $T\in L(\hat{X},Z)$:

$$T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N})=b(x,y_n),\ x\in X, n\in N.$$

Определим отображение $b^*:Z^*\times Y\to X^*$ по формуле

$$b^*(f,y)(x) = f(b(x,y)),\ f \in Z^*,\ y \in Y,\ x \in X.$$

В частности, при $Y = L(Z,X)$ и $b(x,A) = A(x)$ имеем $b^*(f,A) = A^*(f)$.

В следующей теореме устанавливается связь между b-гильбертовостью и b^*-бесселевостью пары b-биортогональных систем.

Теорема 7. *Пусть $\hat{X}$ - рефлексивное CB-пространство, пространство Z - рефлексивно, система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z, $\{y_n^*\}_{n\in N}$ полна в Z^*. Тогда для того, чтобы $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}}$-гильбертова в Z необходимо и достаточно, чтобы $\{y_n^*\}_{n\in N}$ была $b^*_{\hat{X}^*}$-бесселевой в Z^*.*

В параграфе 1.5 рассматриваются бесселевость и гильбертовость последовательностей в банаховых пространствах без предположения условия минимальности.

Пусть X и Z - банаховы пространства, $\hat{X}$ - KB-пространство последовательностей из векторов X. Рассмотрим систему операторов $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$.

Через $L_{X^*}\left(\{g_n\}_{n\in N}\right)$ обозначается совокупность конечных линейных комбинаций вида $\sum_k x_k^* g_k$, $x_k^* \in X^*$.

Определение 7. *Система $\{g_k\}_{k\in N}$ называется g-полной в Z^*, если имеет место равенство $\overline{L_{X^*}\left(\{g_n\}_{n\in N}\right)} = Z^*$. Системы $\{g_k\}_{k\in N}$ и $\{\Lambda_j\}_{j\in N} \subset L(X,Z)$ называются g-биортогональными, если $g_k\Lambda_j = \delta_{kj} I_X$. Система $\{g_k\}_{k\in N}$ называется g-минимальной в Z^*, если $\forall x^* \in X^* \setminus \{0\}$ и $\forall k \in N$ имеет место соотношение $x^* g_k \notin \overline{L_{X^*}\left(\{g_n\}_{n\neq k}\right)}$.*

Следующее понятие является обобщением бесселевых и гильбертовых систем в гильбертовых и банаховых пространствах.

Определение 8. *Систему назовем* $\hat{X}$*-бесселевой в* Z*, если* $\forall z \in Z$ *выполняется условие* $\{g_k(z)\}_{k \in N} \in \hat{X}$.

Систему $\{g_k\}_{k \in N}$ *назовем* $\hat{X}$*-гильбертовой в* Z*, если* $\forall \{x_k\}_{k \in N} \in \hat{X}$ $\exists z \in Z$ *:* $g_k(z) = x_k$.

Имеет место следующий критерий $\hat{X}$-бесселевости.

Теорема 8. *Для того, чтобы система* $\{g_k\}_{k \in N}$ *была* $\hat{X}$*-бесселевой в* Z*, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $U \in L(Z, \hat{X})$ *такой, что* $\hat{\delta}_n U = g_n$ *для любого* $n \in N$.

Приведем критерий $\hat{X}$-гильбертовости систем.

Теорема 9. *Для того, чтобы система* $\{g_k\}_{k \in N}$ *была* $\hat{X}$*-гильбертовой в* Z *достаточно, а в случае* g*-полноты* $\{g_k\}_{k \in N}$ *и необходимо, чтобы* $\exists T \in L(\hat{X}, Z)$*:* $g_n T = \hat{\delta}_n$, $\forall n \in N$.

Следующая теорема устанавливает связь между $\hat{X}$-бесселевостью и $\hat{X}$-гильбертовостью систем.

Теорема 10. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство,* Z *- рефлексивно. Для того, чтобы* $\{g_k\}_{k \in N}$ *была* $\hat{X}$*-гильбертовой в* Z *достаточно, а в случае* g*-полноты* $\{g_k\}_{k \in N}$ *и необходимо, чтобы выполнялись условия:*

1) $\{g_k\}_{k \in N}$ *имеет* g*-биортогональную систему* $\{\Lambda_k\}_{k \in N} \subset L(X, Z)$*;*

2) система $\{\Lambda_k^*\}_{k \in N}$ *является* $\hat{X}^*$*-бесселевой в* Z^*.

Определение 9. *Система* $\{g_k\}_{k \in N}$ *называется* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базисом в* Z^**, если* $\{g_k\}_{k \in N}$ g*-полна в* Z^* *и существуют* $A > 0$ *и* $B > 0$ *такие, что*

$$A\left\|\hat{x}^*\right\|_{\hat{X}^*} \le \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^* g_k\right\|_{Z^*} \le B\left\|\hat{x}^*\right\|_{\hat{X}^*}, \ \forall \hat{x}^* \in \hat{X}^*.$$

Справедлива следующая

Теорема 11. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство,* Z *- рефлексивно и система* $\{g_k\}_{k\in N}$ g*-полна в* Z^**. Для того, чтобы система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *была* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базисом в* Z^* *необходимо, и достаточно, чтобы* $\{g_k\}_{k\in N}$ *одновременно была* $\hat{X}$*-бесселевой и* $\hat{X}$*-гильбертовой системой.*

В параграфе 1.6 даются понятия несчетных бесселевых и гильбертовых систем в несепарабельных банаховых пространствах и доказываются соответствующие критерии.

Пусть X - несепарабельное банаховое пространство, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset X$ и $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}\subset X^*$ - пара биортогональных систем, I - несчетное множество индексов. Пусть K - несепарабельное банахово пространство систем из скаляров.

Следующие понятия являются несчетными обобщениями бесселевых и гильбертовых последовательностей.

Определение 10. *Систему* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *назовем несчетным* K*-бесселевым в* X*, если для* $\forall x\in X$ $\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I}\in K$*. Систему* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *назовем несчетным* K*-гильбертовым в* X*, если для* $\forall\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in K$ *существует* $x\in X$ $:\lambda=\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I}$.

Пусть K - CB-пространство с несчетным безусловным базисом $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и для $\forall\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in K$ множество $\{\alpha:\lambda_\alpha\neq 0\}$ не более чем счетно.

Сформулируем критерии несчетной K-бесселевости и K-гильбертовости систем.

Теорема 12. *Для того, чтобы система* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *была несчетным* K*-бесселевым в* X *необходимо, а в случае полноты* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *в* X*, то и достаточно существование оператора* $T\in L(X,K)$ $:Tx_\alpha=\delta_\alpha,\ \forall\alpha\in I$.

Теорема 13. *Для того, чтобы система* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *была несчетным* K*-гильбертовым в* X *достаточно, а в случае* *полноты* $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ *в* X^**, то и необходимо существование оператора* $T\in L(K,X)$*:* $T\delta_\alpha = x_\alpha$*,* $\forall\alpha\in I$*.*

Глава II посвящена изучению обобщений результатов относительно изоморфных и близких базисов в банаховых пространствах в контексте b-базисов. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [4, 7, 13].

В параграфе 2.1 изучаются свойства b-изоморфности b-базисов и возмущение b-базисов.

Пусть X, Y и Z - банаховы пространства.

В следующей теореме приводятся условия b-изоморфности к b-базису при фредгольмовом возмущении.

Теорема 14. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* b*-базис в* Z*,* $F\in L(Z)$ *- фредгольмовый оператор, система* $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *такая, что* $F(b(x,\varphi_n)) = b(x,\psi_n)$*,* $\forall x\in X$*,* $n\in N$*. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

a) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *-* b*-полна в* Z*;*

b) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *-* b*-минимальна в* Z*;*

c) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *-* ω*-*b*-линейно независима в* Z*;*

d) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *-* b*-базис в* Z*,* b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$*.*

Определение 11. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *с* b*-биортогональной системой* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *назовем* p*-*b*-бесселевой в* Z*, если* $\forall z\in Z$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|y_n^*(z)\right\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \le M_1\|z\|_Z .$$

Если p*-*b*-бесселевая в* Z *система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис в* Z*, то систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* p*-*b*-базисом в* Z*.*

Теорема 15. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* p*-базис в* Z *с* b*-сопряженной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}\subset Q(Z,X)$*,*

система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ q*-близка к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.
Тогда условия a)-d) теоремы 14 эквивалентны.

В параграфе 2.2 изучается устойчивость b-базисов в банаховых пространствах.

Следующая теорема является обобщением теоремы о базисности Рисса системы квадратично близкой к базису Рисса.

Теорема 16. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* $b_{l_2(X)}$*-базис Рисса в* H*, такая, что* $\omega_b(\cdot,\varphi_n^*)\in Q(Z,X)$*, система* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ ω*-*b*-линейно независима и квадратична близка к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$*. Тогда* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис в* H*,* b*-изомофный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$*, т. е.* $b_{l_2(X)}$*-базис Рисса.*

Следующая теорема является обобщением теоремы Пэли-Винера в банаховых пространствах.

Теорема 17. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* b*-базис в* Z *и система* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *такая, что* $\exists\theta\in[0,1)$*, для любой конечной последовательности* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$

$$\left\|\sum_n b(x_n,\varphi_n-\psi_n)\right\|_Z \le \theta\left\|\sum_n b(x_n,\varphi_n)\right\|_Z .$$

Тогда $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис,* b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

В параграфе 2.3 изучается бесселевый базис и его устойчивость в банаховом пространстве относительно банахова пространства последовательностей векторов. Получены аналоги результатов p-b-базиса относительно пространства последовательностей векторов.

Глава III посвящена изучению фреймов, атомарных разложений и их возмущений в банаховых пространствах исходя из билинейных отображений. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [9, 12, 14, 16-21, 26-28].

В параграфе 3.1 приведены понятия b-фреймов, b-фреймового оператора в гильбертовых пространствах и изучены некоторые их свойства.

Пусть X и H - гильбертовы пространства и $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$. Следующее понятие является обобщением фреймов в гильбертовых пространствах.

Определение 12. *Последовательность* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* b*-фреймом в* H*, если существуют постоянные* $A, B > 0$*:*

$$A\|h\|_H^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 \leq B\|h\|_H^2, \quad \forall h \in H. \qquad (1)$$

Постоянные A и B назовем границами b-фрейма $\{y_n\}_{n\in N}$. При выполнении правой части (1) систему $\{y_n\}_{n\in N}$ назовем b-бесселевой в H с границей B.

В случае, когда $X = C$, $Y = H$ и $b(\lambda, y) = \lambda y$ имеем $\omega_b(h, y) = (h, y)_H$ и неравенство (1) принимает вид

$$A\|h\|_H^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(h, y_k)|^2 \leq B\|h\|_H^2, \ \forall h \in H,$$

т. е. $\{y_n\}_{n\in N}$ - фрейм в H с границами A и B.

Имеет место следующий критерий b-фреймовости.

Теорема 18. *Последовательность* $\{y_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-фрейм в* H *тогда и только тогда, когда определен ограниченный сюръективный оператор* $T : l_2(X) \to Z$*, заданный по формуле* $T(\{x_k\}_{k\in N}) = \sum_{k=1}^{\infty} b(x_k, y_k)$.

Пусть Y_1 - банахово пространство, H_1 - гильбертово пространство и $b_1 : X \times Y_1 \to H_1$ ограниченное билинейное отображение.

Имеет место нетерово возмущение b-фреймов.

Теорема 19. *Пусть система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *является* b*-фреймом в* H *с* b*-фреймовыми границами* A *и* B*,* $F \in L(H, H_1)$ *является* *нетеровым оператором и система* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ *такая, что* $F(b(x, y_n)) = b_1(x, \psi_n)$ *для всех* $x \in X$, $n \in N$. *Тогда* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-фрейм в* $\overline{L_b(\{\psi_n\}_{n\in N})}$.

В параграфе 3.2 изучается обобщение фреймов в банаховых пространствах посредством билинейных отображений в смысле b-базисов.

Определение 13. *Систему* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *назовем* $b_{\hat{X}^*}$-*фреймом в* Z^*, *если для любого* $g \in Z^*$ *имеет место* $\{b^*(g, \varphi_n)\}_{n\in N} \in \hat{X}^*$ *и существуют* $A, B > 0$:

$$A\|g\| \le \left\|\{b^*(g, \varphi_n)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \le B\|g\|.$$

Имеет место следующий критерий $b_{\hat{X}^*}$-фреймовости.

Теорема 20. *Система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* $b_{\hat{X}^*}$-*фрейм в* Z^*, *тогда и только тогда, когда определен ограниченный сурьективный оператор* $T : \hat{X} \to Z$ *по формуле*

$$T\hat{x} = \sum_{n=1}^{\infty} b(x_n, \varphi_n),\ \forall \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}.$$

В следующей теореме устанавливается проекционное свойство $b_{\hat{X}^*}$-фреймов.

Теорема 21. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* $b_{\hat{X}^*}$-*фрейм в* Z^*. *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) Существует объемлющее B-*пространство* Z_1, *включающее в себя пространство* Z *в качестве замкнутого подпространства, имеющий* $t_{\hat{X}}$-*базис* $\{\psi_n^*\}_{n\in N} \subset L(X, Z_1)$, *где* $t(x, \psi^*) = \psi^*(x)$, *и* $P \in L(Z_1, Z)$ - *проектор такой, что* $P\psi_n^*(x) = b(x, \varphi_n)$, *для* $\forall x \in X$, $n \in N$;

2) $\hat{N} = \left\{ \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X} : \sum_{n=1}^{\infty} b(x_n, \varphi_n) = 0 \right\}$ *дополняемо в* $\hat{X}$;

3) Существует $\hat{X}$-бесселева система $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ такая, что для $\forall z \in Z \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n)$.

В параграфе 3.3 обобщаются некоторые свойства банаховых фреймов в банаховых пространствах на случай пространств последовательностей векторов.

Определение 14. *Систему $\{g_n\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ назовем $\hat{X}$-фреймом в Z, если существуют $A,B>0$:*

$$A\|z\|_Z \le \left\|\{g_k(z)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\|z\|_Z,\ \forall z \in Z.$$

Имеет место следующий критерий $\hat{X}$-фреймовости.

Теорема 22. *Пусть $\hat{X}$ - рефлексивное CB-пространство, Z - рефлексивно и система $\{g_n\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$. Тогда $\{g_n\}_{n\in N}$ образует $\hat{X}$-фрейм в Z тогда и только тогда, когда оператор $T:\hat{X}^* \to Z^*$, определенный по формуле*

$$T(\hat{x}^*) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* g_k,\ \forall \hat{x}^* = \{x_k^*\}_{k\in N} \in \hat{X}^*$$

является линейным ограниченным сюрьективным оператором.

Следующее понятие является обобщением банаховых фреймов относительно векторнозначных последовательностей.

Определение 15. *Пусть система $\{g_n\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ и $S:\hat{X} \to Z$ линейный оператор. Пара $\left(\{g_n\}_{n\in N}, S\right)$ называется банаховым $\hat{X}$-фреймом в Z, если выполнены условия*

1) $\{g(z)\}_{n\in N} \in \hat{X}$;

2) существуют $A,B>0$: $A\|z\|_Z \le \left\|\{g_n(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\|z\|_Z$;

3) S ограничен на $\hat{X}$ и $S(\{g_n(z)\}_{n\in N}) = z$, $\forall z \in Z$.

Справедлива

Теорема 23. *Пусть* $\{g_n\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ *является* $\hat{X}$*-фреймом в* Z *и оператор* $U \in L(Z,\hat{X})$ *задан по формуле* $U(z)=\{g_n(z)\}_{n\in N}$, $\forall z \in Z$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Im}U$ *дополняемо в* $\hat{X}$*;*

2) оператор $U^{-1}:\mathrm{Im}U \to Z$ *может быть продолжен до ограниченного оператора на все* $\hat{X}$*;*

3) существует ограниченный оператор $S \in L(\hat{X},Z)$ *такой, что пара* $\left(\{g_n\}_{n\in N}, S\right)$ *образует банаховый* $\hat{X}$*-фрейм;*

4) $\exists\{\Lambda_n\}_{n\in N} \subset L(X,Z)$ $\hat{X}^*$*-бесселевая в* Z^* *система:*

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k g_k(z),\ \forall z \in Z.$$

В параграфе 3.4 изучается связь между $\hat{X}$-фреймами и $\hat{X}$-Рисс базисами в банаховых пространствах.

Имеет место критерий $\hat{X}^*$-Рисс g-базисности.

Теорема 24. *Пусть* $\hat{X}$ *-рефлексивное* CB*-пространство, и* Z *- рефлексивно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\{g_n\}_{n\in N}$ *-* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*- базис в* Z^* *с границами* A *и* B*;*

2) $\{g_n\}_{n\in N}$ *-* $\hat{X}$*-фрейм в* Z *с границами* A*,* B*, и* g*-минимальна в* Z^**;*

3) $\{g_n\}_{n\in N}$ *-* g*-полна, одновременно* $\hat{X}$*-бесселева и* $\hat{X}$*-гильбертова в* Z.

В параграфе 3.5 изучается b-атомарные разложения и их нетерово возмущение в банаховых пространствах.

Определение 16. *Пару* $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, \{y_n\}_{n\in N}\right)$ *назовем* $b_{\hat{X}}$*-атомарным разложением в* Z *относительно* $\hat{X}$*, если*

1) $\{y_n^*(z)\}_{n\in N} \in \hat{X}$, $\forall z \in Z$*;*

2) существуют $A, B > 0$*:* $A\|z\|_Z \le \left\|\left\{y_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\|z\|_Z$ *;*

3) $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(y_n^*(z), y_n)$*,* $\forall z \in Z$.

Если $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}^*}$-фреймом в Z^* и $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, \{y_n\}_{n\in N}\right)$ является $b_{\hat{X}}$-атомарным разложением в Z, то $\{y_n\}_{n\in N}$ будем называть альтернативным дуальным для $\{y_n^*\}_{n\in N}$.

В следующей теореме устанавливается нетерово возмущение $b_{\hat{X}}$-атомарного разложения.

Теорема 25. *Пусть* $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, \{y_n\}_{n\in N}\right)$ - $b_{\hat{X}}$*-атомарное разложение* Z *с границами* A *и* B*,* $F \in L(Z, Z_1)$ *нетеров оператор и* $F_b(y_n) = \psi_n$*. Тогда существует* $\{\psi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z_1, X)$ *такая, что* $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N}, \{\psi_n\}_{n\in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$*-атомарным разложением в* $\overline{L_b\left(\{\psi_n\}_{n\in N}\right)}$*. Если* $\{y_n\}_{n\in N}$ *альтернативный дуальный* $b_{\hat{X}}^*$*-фрейм в* Z^* *для* $\{y_n^*\}_{n\in N}$*, то* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *альтернативный дуальный* $b_{\hat{X}}^*$*-фрейм в* $Z_1^* - \ker F^*$ *для* $\{\psi_n^*\}_{n\in N}$.

В параграфе 3.6 изучается устойчивость $b_{\hat{X}}$-атомарного разложения и $\hat{X}$-фрейма в банаховых пространствах.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$.

Имеет место следующая

Теорема 26. *Пусть* $\left(\{\varphi_n^*\}_{n\in N}, \{\varphi_n\}_{n\in N}\right)$ - $b_{\hat{X}}$*-атомарное разложение в* Z *с границами* A *и* B*, и* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *некоторая система. Предположим, что существуют числа* $\lambda, \beta, \mu \ge 0$*:*

i) $\max\{\beta; \lambda + \mu B\} < 1$*;*

ii) $\left\|\sum_i b(x_i, \varphi_i - \psi_i)\right\|_Z \le$

$$\leq \lambda \left\| \sum_i b(x_i, \varphi_i) \right\|_Z + \beta \left\| \sum_i b(x_i, \psi_i) \right\|_Z + \mu \left\| \{x_i\} \right\|_{\hat{X}}.$$

Тогда существует $\{\psi_n^*\}_{n \in N} \subset L(Z, X)$ *такая, что* $\left(\{\psi_n^*\}_{n \in N}, \{\psi_n\}_{n \in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$*-атомарным разложением в* Z *с границами*

$$\frac{(1-\beta)A}{1+(\lambda+\mu B)} \text{ и } \frac{(1+\beta)B}{1-(\lambda+\mu B)}.$$

В параграфе 3.7 изучаются аналогичные результаты об устойчивости банахового $\hat{X}$-фрейма и $\hat{X}$-Рисс g-базиса в банаховых пространствах.

Глава IV посвящена получению аналогов теорем Рисса и Пэли[3] в пространствах Лебега и пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости со смешанной нормой, и исследованию обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [5, 10, 26].

В параграфе 4.1 доказываются аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Обозначим через $l_p(a,b)$, $p > 1$, - банахово пространство последовательностей $a(t) = \{a_i(t)\}_{i \in N}$ измеримых на (a,b) функций, для которых конечна норма

$$\|a\|_{l_p(a,b)} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b |a_i(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n \in N}$ - ортонормированная система на $[a,b]$ такая, что почти всюду на $[a,b]$ $|\varphi_n(t)| \leq M$ $(n \in N)$, M не зависит от n.

[3]Зигмунд, А. Тригонометрические ряды: [в 2 томах] / – Москва: Наука, – 1965, т.2, – 526 с.

Имеет место аналог теоремы Рисса в $l_p(a,b)$.

Теорема 27. *Верны следующие утверждения:*

1) если $f \in L_{(q,p)}((a,b)\times(c,d))$, $1 < p \le 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a_i(t) = \int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$, *то* $a(t) = \{a_i(t)\}_{i\in N} \in l_q(a,b)$, *причем*

$$\|a\|_{l_q(a,b)} \le M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_{L_{(q,p)}};$$

2) если $a(t) = \{a_i(t)\}_{i\in N} \in l_p(a,b)$, $1 < p \le 2$, *то существует* $f \in L_{(p,q)}((a,b)\times(c,d))$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *такая, что* $a_i(t) = \int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$, *причем* $\|f\|_{L_{(p,q)}} \le M^{\frac{2-p}{p}} \|a\|_{l_p(a,b)}$.

В параграфе 4.2 доказываются аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости со смешанной нормой.

Пусть Ω и T - измеримые множества из R^n, $p(x)\ge 1$, $q(x)\ge 1$ - измеримые функции на Ω. Обозначим через

$$p_+(E) = ess\sup_{x\in E} p(x) \text{ и } p_-(E) = ess\inf_{x\in E} p(x),$$

в частности, положим $p_+ = p_+(\Omega)$, $p_- = p_-(\Omega)$. Пусть $\Omega_\infty = \{x\in\Omega : p(x)=\infty\}$.

Определение 17. *Модуляром измеримой функции* $f:\Omega\to R$ *относительно* $p(\cdot)$ *называется число*

$$\rho_{p(\cdot),\Omega}(f) = \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)}dx + \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}.$$

Через $L_{p(x)}(\Omega)$ обозначается банахово пространство измеримых функций $f:\Omega\to R$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda>0 : \rho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)\le 1\}.$$

Через $L_{q(\cdot)}(\Omega, L_{p(\cdot)}(T))$ обозначается пространство измеримых на $\Omega\times T$ функций $f(x,t):\Omega\times T\to R$ таких, что для почти всех $x\in\Omega$ $f(x,\cdot)\in L_{p(x)}(T)$ и $\|f(x,\cdot)\|_{L_{p(x)}(T)}\in L_{q(x)}(\Omega)$, а $l_{p(x)}(\Omega)$ и $l_{p(x),p(x)-2}(\Omega)$ - пространства последовательностей $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ измеримых на Ω функций с соответствующими нормами

$$\|\{c_k\}\|_{l_{p(x)}(\Omega)}=\inf\left\{\lambda>0:\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\le 1\right\},$$

$$\|\{c_k\}\|_{l_{p(x),p(x)-2}(\Omega)}=\inf\left\{\lambda>0:\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}k^{p(x)-2}\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\le 1\right\}.$$

В следующей теореме приводится аналог Теоремы Рисса в пространствах $L_{q(x)}(\Omega, L_{p(x)}(T))$.

Теорема 28. *Верны следующие утверждения:*

1) Если $f\in L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))$, $1<p_-\le p(x)\le 2$, *и* $c_k(x)=\int_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k\in N$, *то* $\{c_k\}_{k\in N}\in l_{q(x)}(a,b)$, *и*

$$\|\{c_k\}_{k\in N}\|_{l_{q(x)}(a;b)}\le M_1(p)\|f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))},\ q(x)=\frac{p(x)}{p(x)-1}.$$

2) Для любой $\{c_k\}_{k\in N}\in l_{p(x)}(a,b)$, $1<p(x)\le 2$, *существует функция* $f\in L_{p(x)}((a,b),L_{q(x)}(c,d))$, *для которой* $c_k(x)=\int_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k\in N$ *и*

$$\|f\|_{L_{p(x)}((a,b),L_{q(x)}(c,d))}\le M_1(p)\|\{c_k\}_{k\in N}\|_{l_{p(x)}(a,b)},\ q(x)=\frac{p(x)}{p(x)-1}.$$

Теорема 29. *Верны следующие утверждения:*

1) если $f\in L_{p(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))$, $1<p_-\le p(x)\le 2$, *и* $c_k(x)=\int_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k\in N$, *то* $\{c_k\}_{k\in N}\in l_{p(x),p(x)-2}(a,b)$ *и*

$$\left\| \{c_k\}_{k\in N} \right\|_{l_{p(x),p(x)-2}(a;b)} \le \frac{AM_1(p)}{p_- - 1} \|f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))} \;;$$

2) для любой последовательности $\{c_k\}_{k\in N} \in l_{q(x),q(x)-2}$, $2 \le q(x) \le q_+ < \infty$, *существует* $f \in L_{q(x)}((a,b),L_{q(x)}(c,d))$ *для которой* $c_k(x) = \int_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k \in N$ *и*

$$\|f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{q(x)}(c,d))} \le Aq_+M_2(q) \left\| \{c_k\}_{k\in N} \right\|_{l_{q(x),q(x)-2}(a,b)} .$$

В параграфе 4.3 доказывается существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциального уравнения третьего порядка.

Пусть T - некоторое положительное число. Обозначим через $L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))$, $p \ge 2$, - банахово пространство функций $f(t,x) \in L_p(D)$, $D = (0,T)\times(0,\pi)$, с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \int_0^T |f_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $f_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t,x)\sin nxdx$.

Пусть $B^{\alpha_0,\alpha_1,..,\alpha_k}_{\beta_0,\beta_1,..,\beta_k,T}$ - пространство функций $u(t,x)$ вида $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$, рассматриваемых на прямоугольнике D, для которых $u_n(t) \in C^{(k)}([0,T])$, с конечной нормой

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_k}_{\beta_0,\beta_1,...,\beta_k T}} = \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \max_{0\le t\le T} \left| u_n^{(i)}(t) \right| \right)^{\beta_i} \right)^{\frac{1}{\beta_i}},$$

где $\alpha_i \ge 0$, $\beta_i \ge 1$, $i = \overline{0,k}$, $k \ge 0$ - целое число.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения

$$u_{tt}(t,x)-\alpha u_{txx}(t,x)=F(u(t,x)) \qquad (2)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x),\ 0\le x\le\pi, \qquad (3)$$

$$u(t,\pi)=u(t,0)=0,\ 0\le t\le T, \qquad (4)$$

где $0<\alpha$ - фиксированное число, F - заданный, вообще говоря, нелинейный оператор, φ и ψ - заданные функции.

Определение 18. *Функция* $u(t,x)\in B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$ *(q,p- сопряженные числа), удовлетворяющая условию (3) называется обобщенным решением задачи (2)-(4), если для любой функции* $v(t,x)\in W^1_1([0,T],L_q(0,\pi))$ *такой, что* $v(T,x)=0$ *п.в. на* $[0,\pi]$, $v(t,0)=v(t,\pi)=0$, $t\in[0,\pi]$, *выполняется тождество*

$$\int_0^T\int_0^\pi\{u_t(t,x)v_t(t,x)-\alpha u_{xx}(t,x)v_t(t,x)+F(u(t,x))v(t,x)\}dxdt-$$

$$-\alpha\int_0^\pi\varphi^{//}(x)v(0,x)dx+\int_0^\pi\psi(x)v(0,x)dx=0.$$

В следующей теореме доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи (2)-(4).

Теорема 30. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\varphi(x)\in C^{(1)}([0,\pi])\cap W^2_p(0,\pi)$, $\{n^2\varphi_n\}_{n\in N}\in l_{p,p-2}$, $\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$, $\psi(x)\in C([0,\pi])\cap W^1_p(0,\pi)$, $\{n\psi_n\}_{n\in N}\in l_{p,p-2}$, $\psi(0)=\psi(\pi)=0$;

2) $F(u)\in L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))$, $u\in B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$, $p\ge 2$, *существуют* $a(t),b(t)\in L_p(0,T)$ *такие, что*

$$\|F(u)(t,\cdot)\|_{L_{p,p-2}(0,\pi)}\le a(t)+b(t)\|u\|_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}},\ t\in[0,T];$$

3) существует функция $c(t)\in L_p(0,T)$ $:\forall u,v\in S(0,R)$

$$\|F(u)(t,\cdot)-F(v)(t,\cdot)\|_{L_{p,p-2}(0,\pi)}\le c(t)\|u-v\|_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}},\ t\in[0,T],$$

где R – некоторое число. Тогда задача (2)-(4) имеет единственное обобщенное решение.

Глава V посвящена вопросам базисности классической системы экспонент, а также системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в пространствах гранд Лебега и в их весовых вариантах. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [31, 33-36].

В параграфе 5.1 доказывается плотность множества непрерывных функций в подпространстве гранд Лебега, порожденное оператором сдвига.

Пусть $\Omega \subset R^n$ - измеримое множество с конечной лебеговой мерой $|\Omega|$ и $p > 1$. Через $L_{p)}(\Omega)$ обозначается банахово пространство гранд Лебега измеримых на Ω функций f таких, что

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty .$$

Рассмотрим в $L_{p)}(a,b)$ оператор сдвига

$$T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x+\delta), x+\delta \in [a,b], \\ 0, x+\delta \in R \setminus [a,b], \end{cases}, \ \delta > 0 .$$

Пусть $G_{p)}(a,b)$ замыкание в $L_{p)}(a,b)$ линейного многообразия, состоящее из функций $f \in L_{p)}(a,b)$: $\|T_\delta f - f\|_{p)} \to 0$, $\delta \to 0$.

Справедлива

Теорема 31. *Множество $C_0^\infty[a,b]$ плотно в $G_{p)}(a,b)$.*

В параграфе 5.2 доказывается базисность системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространстве гранд Лебега, порожденное оператором сдвига.

Доказана базисность системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в $G_{p)}(-\pi,\pi)$.

Теорема 32. *Система экспонент* $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ *образует базис в пространстве* $G_{p)}(-\pi,\pi)$.

Теорема 33. *Системы синусов* $\left\{\sin nt\right\}_{n\in N}$ *и косинусов* $\left\{\cos nt\right\}_{n\in N_0}$ *образуют базисы в пространстве* $G_{p)}(0,\pi)$.

В параграфе 5.3 изучается базисность системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в весовых пространствах гранд Лебега с общим весом.

Пусть $\rho:[a,b]\to R_+$ - некоторая весовая функция. Через $A_p(a,b)$, $1<p<+\infty$, обозначается класс Макенхоупта, т. е. класс весовых функций $\rho(t)$ удовлетворяющих условию

$$\sup_{I\subset[a,b]}\frac{1}{|I|}\int_I\rho(t)dt\left(\frac{1}{|I|}\int_I\rho(t)^{-\frac{1}{p-1}}dt\right)^{p-1}<+\infty\cdot$$

Обозначим через $G_{p),\rho}(a,b)$ подпространство пространства $L_{p),\rho}(a,b)$ функций f таких, что $\rho f\in G_{p)}(a,b)$.

Доказываются базисности классической системы экспонент и тригонометрических систем в $G_{p),\rho}(-1,1)$.

Теорема 34. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу Макенхоупта* $A_p(-1,1)$. *Тогда система экспонент* $\left\{e^{in\pi x}\right\}_{n\in Z}$ *образует базис в пространстве* $G_{p),\rho}(-1,1)$.

Теорема 35. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу* $A_p(0,1)$. *Тогда система синусов* $\left\{\sin\pi nx\right\}_{n\in N}$ *и косинусов* $\left\{\cos\pi nx\right\}_{n\in Z_+}$ *образуют базис в пространстве* $G_{p),\rho}(0,1)$.

В параграфе 5.4 рассматривается разрывная спектральная задача для дифференциального уравнения второго порядка в пространстве гранд Лебега.

Рассмотрим следующую разрывную спектральную задачу

$$y''(x)+\lambda y(x)=0\,,\ x\in(-1,0)\cup(0,1)\,, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &y(-1)=y(1)=0,\\ &y(-0)=y(+0),\\ &y'(-0)-y'(+0)=\lambda m y(0), m\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Определим в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$ оператор L по формуле

$$L(\hat{u})=(-u'',u'(-0)-u'(+0))$$

область определения $D(L)$, которого состоит из

$$\hat{u}=\left(u;mu(0)\right)\in GW_{p)}^2((-1,0)\cup(0,1))\oplus C$$

удовлетворяющее условиям

$$u(-1)=u(1)=0\,,\ u(-0)=u(+0)\,.$$

В работе T.B.Gasymov и S.J.Mammadova[4] показано, что задача (5), (6) имеет следующие две серии собственных значений $\lambda_{1,n}=(\pi n)^2$, $n=1,2,...$, $\lambda_{2,n}=\rho_{2,n}^2$, $n=0,1,2,...$, где $\rho_{2,n}$ имеет асимптотику $\rho_{2,n}=\pi n+\dfrac{2}{\pi m n}+O(\dfrac{1}{n^2})$, соответствующие

,

собственные функции, которых имеют вид

$$u_{2n-1}(x)=\sin\pi n x\,,\ n=1,2,...,$$

$$u_{2n}(x)=\begin{cases}\sin\rho_{2,n}(1+x), x\in[-1,0]\\ \sin\rho_{2,n}(1-x), x\in[0,1]\end{cases},\ n=0,1,2,....$$

Пусть

$$\hat{u}_{2n-1}(x)=(u_{2n-1}(x);0)\,,\ n=1,2,...,$$

$$\hat{u}_{2n}(x)=(u_{2n}(x);m\sin\rho_{2,n})\,,\ n=0,1,2,....$$

---

[4]Gasymov, T.B., Mammadova, S. J. On convergence of spectral expansions for one discontinuous problem with spectral parameter in the boundary condition // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, – 2006. 26(4), – p.103–116.

Теорема 36. *Система собственных векторов* $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ *оператора* L *образует базис в пространстве* $G_{p)}(-1,1)\oplus C$.

В параграфе 5.5 устанавливается базисность системы собственных функций дифференциального оператора одной разрывной спектральной задачи в весовом пространстве гранд Лебега с общим весом.

Рассмотрим разрывную спектральную задачу

$$y^{//}(x)+\lambda y(x)=0\,,\ x\in(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1)\,, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &y(0)=y(1)=0,\\ &y(\frac{1}{3}-0)=y(\frac{1}{3}+0),\\ &y^{/}(\frac{1}{3}-0)-y^{/}(\frac{1}{3}+0)=\lambda m y(\frac{1}{3}),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где λ - спектральный параметр, m - ненулевое комплексное число. В работе T.B.Gasymov, A.M.Akhtyamov и N.R.Ahmedzade показано, что задача (7), (8) имеет две серии собственных значений[5] $\lambda_{1,n}=(\rho_{1,n})^2$, $n\in N$, и $\lambda_{2,n}=(\rho_{2,n})^2$, $n\in N\cup\{0\}$, где

$$\rho_{1,n}=3\pi n\,,\ \rho_{2,n}=\frac{3\pi n}{2}+\frac{2+(-1)^n}{\pi m n}+O(\frac{1}{n^2})\,,$$

соответствующие собственные функции выражаются в виде

$$y_{1,n}(x)=\sin 3\pi n x\,,\ x\in[0,1]\,,\ n\in N\,,$$

$$y_{2,n}(x)=\begin{cases}\sin\rho_{2,n}(x-\frac{1}{3})+\sin\rho_{2,n}(x+\frac{1}{3}), x\in[0,\frac{1}{3}]\\ \sin\rho_{2,n}(1-x), x\in[\frac{1}{3},1]\end{cases},\ n\in N\cup\{0\}.$$

---

[5]Gasymov, T.B., Akhtyamov, A.M., Ahmedzade, N.R., On the basicity of eigenfunctions of a second-order differential operator with a discontinuity point in weighted Lebesgue spaces // – Baku: Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2020. v.46, №1, – p. 32–44.

Рассмотрим в пространстве $G_{p)}(0,1)\oplus C$ оператор L по формуле

$$L(\hat{y})=(-y^{//};y^{/}(\frac{1}{3}-0)-y^{/}(\frac{1}{3}+0)),$$

область определения $D(L)$, которого состоит из

$$\hat{y}=\left(y;my(\frac{1}{3})\right)\in GW_{p)}^{2}((0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1))\oplus C$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0)=y(1)=0,\ y(\frac{1}{3}-0)=y(\frac{1}{3}+0).$$

Теорема 37. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу* $A_p(0,1)$. *Тогда система* $\{\hat{y}_n\}_{n\in Z_+}$ *собственных векторов оператора* L *образует базис в пространстве* $G_{p),\rho}(0,1)\oplus C$.

В следующей теореме изучаются базисные свойства в пространствах $G_{p),\rho}(0,1)$, $1<p<+\infty$, системы собственных векторов $\{y_0\}\cup\{y_{i,n}\}_{i=1,2;n\in N}$ задачи (7), (8).

Теорема 38. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу* $A_p(0,1)$. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если из системы $\{y_0\}\cup\{y_{i,n}\}_{i=1,2;n\in N}$ *исключить произвольную функцию* $y_{2,n_0}(x)$, *соответствующее простому собственному значению, то полученная система образует базис в пространстве* $G_{p),\rho}(0,1)$;

2) если из системы $\{y_0\}\cup\{y_{i,n}\}_{i=1,2;n\in N}$ *исключить произвольную функцию* $y_{1,n_0}(x)$, *то полученная система не полна и не минимальна в* $G_{p),\rho}(0,1)$.

В параграфе 5.6 изучаются аналоги теорем Коровкина и их статистические варианты в пространствах гранд Лебега.

Теорема 39. *Пусть* $\{L_n\}_{n\in N}$ *- последовательность положительных линейных ограниченных операторов в* $G_{p)}(0,1)$, $p>1$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n g - g\|_\infty = 0,\ \forall g \in \{1,t,t^2\}.$$

Тогда соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f - f\|_{p)} = 0,\ \forall f \in G_{p)}(0,1),$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\sup_n \|L_n\| = c < +\infty$.

Следствие 1. *Пусть* $\{L_n\}_{n\in N}$ *- последовательность положительных линейных ограниченных операторов в* $G_{p)}(0,1)$, $p>1$, *и* $\sup_n \|L_n\| = c < +\infty$. *Если в* $C([0,1])$ $\exists st - \lim_{n\to\infty} L_n g = g$, $\forall g \in \{1,t,t^2\}$, *то* $\exists st - \lim_{n\to\infty} L_n f = f$, $\forall f \in G_{p)}(0,1)$.

Глава VI посвящена определению классов гранд Харди, разрешимости задач Римана в классах гранд Харди, и базисности возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [30, 32].

В параграфе 6.1 определяется класс гранд Харди, доказываются аналоги теоремы Рисса, Смирнова и о представлении функции по формуле Коши.

Пусть $\omega = \operatorname{int}\gamma$. Определим пространство гранд Харди $H^+_{p)}$, $p>1$, аналитических в ω функций f:

$$\|f\|_{H^+_{p)}} = \sup_{0<r<1}\|f_r(\cdot)\|_{p)} < +\infty,\ f_r(t) = f(re^{it}).$$

Справедлива первая часть теоремы Рисса в $H^+_{p)}$.

Теорема 40. *Всякая функция* $f \in H^+_{p)}$, $p>1$, *имеет почти всюду на* γ *граничные значения* $f^+(\cdot)$ *по некасательным путям,* $f^+ \in L_{p)}(0,2\pi)$ *и имеет место* $\|f^+(\cdot)\|_{p)} = \lim_{r\to 1}\|f_r(\cdot)\|_{p)}$.

Вторая часть теоремы Рисса имеет место при дополнительном условии.

Теорема 41. *Пусть* $f \in H^{+}_{p)}$, $p > 1$. *Тогда соотношение* $\lim\limits_{r\to 1}\left\| f_r(\cdot) - f^{+}(\cdot)\right\|_{p)} = 0$ *выполняется в том и только в том случае, когда имеет место* $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\int\limits_0^{2\pi}\left|f^{+}(t)\right|^{p-\varepsilon}dt = 0$.

В следующей теореме устанавливается формула Коши для функций класса гранд Харди.

Теорема 42. *1) Если* $f \in H^{+}_{p)}$, $1 < p < +\infty$, *то имеет место формула Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f^{+}(\xi)}{\xi - z}d\xi,\ z \in \omega. \tag{9}$$

2) Если $f^{+} \in L_{p)}(0,2\pi)$, $1 < p < +\infty$, *то функция* f, *определенная по формуле (9), принадлежит классу* $H^{+}_{p)}$.

В параграфе 6.2 находится общее решение однородной задачи Римана в классах гранд Харди.

Пусть функция $f(z)$ аналитична вне ω и в окрестности бесконечно удаленной точки имеет Лорановское разложение

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{m} a_k z^k,\ z \to \infty.$$

Если правильная часть $f_0(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k$ такая, что $\overline{f_0\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \in H^{+}_{p)}$, $p > 1$, то будем говорить, что f принадлежит классу ${}_{m}H^{-}_{p)}$.

Рассмотрим следующую однородную задачу Римана в классах $H^{+}_{p)} \times {}_{m}H^{-}_{p)}$:

$$F^{+}(\tau) - G(\tau)F^{-}(\tau) = 0,\ \tau \in \gamma, \tag{10}$$

где $G(\tau)$ - заданная на γ измеримая функция.

Пусть $\theta(t) = \arg G(e^{it})$, $t \in [-\pi; \pi]$, и $Z_\theta(z)$ - каноническое решение однородной задачи (10).

Теорема 43. *Пусть коэффициент G задачи Римана (10) удовлетворяет условиям:*

i) $G^{\pm 1}(e^{it}) \in L_\infty(-\pi, \pi)$*;*

ii) $\theta(t)$ *- кусочно гельдерова на отрезке* $[-\pi, \pi]$*,* $\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t)$*, где* $\theta_0(t)$ *- непрерывная часть* $\theta(t)$*,* $\theta_1(t)$ *- функция скачков* $\theta(t)$ *в точках разрыва* $-\pi < s_1 < s_2 < \ldots\ldots < s_r < \pi$*, т. е.*

$$\theta_1(-\pi) = 0,\ \theta_1(t) = \sum_{k: t < s_k} h_k\ ,\ t \in (-\pi, \pi],$$

где $h_k = \theta(s_k + 0) - \theta(s_k - 0)$*,* $k = \overline{1, r}$.

iii) $-\dfrac{1}{q} < \dfrac{h_k}{2\pi} \le \dfrac{1}{p}$*,* $k = \overline{0, r}$ *,* $h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi)$.

Тогда о разрешимости задачи (10) в классах $H^+_{p)} \times_m H^-_{p)}$*,* $p > 1$*, справедлива:*

α) *при* $m \ge 0$ *задача (10) имеет общее решение вида*

$$F(z) = Z_\theta(z) P_k(z),$$

где $P_k(z)$ *- произвольный многочлен степени* $k \le m$*;*

β) *при* $m < 0$ *задача (10) имеет тривиальное решение.*

В параграфе 6.3 находится общее решение неоднородной задачи Римана в классах гранд Харди.

Рассмотрим следующую неоднородную задачу Римана в классах $H^+_{p)} \times_m H^-_{p)}$:

$$F^+(\tau) - G(\tau) F^-(\tau) = f(\tau),\ \tau \in \gamma, \tag{11}$$

где $f \in L_{p)}(\gamma)$, $p > 1$, $G^{\pm 1}(\tau) \in L_\infty(\gamma)$ - заданные функции.

Основным результатом параграфа является

Теорема 44. *Пусть выполнены условия теоремы 43,* $\frac{h_k}{2\pi} \neq \frac{1}{p}$, $k = \overline{0, r}$. *Тогда о разрешимости задачи (11) в классе* $H^+_{p)} \times_m H^-_{p)}$, $p > 1$, *имеет место:*

α) *при* $m \geq -1$ *задача (11) имеет общее решение вида* $F(z) = Z_\theta(z) P_k(z) + F_1(z)$, *где* $P_k(z)$ *- многочлен степени* $k \leq m$ *(при* $m = -1$, $P_k(z) = 0$*) и*

$$F_1(z) = \frac{Z_\theta(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)[Z^+_\theta(\xi)]^{-1}}{\xi - z} d\xi \ ;$$

β) *при* $m < -1$ *задача (11) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие ортогональности*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{Z^+(e^{it})} e^{ikt} dt = 0, \ k = \overline{1, -m-1},$$

при этом задача (11) имеет единственное решение $F(z) = F_1(z)$.

В параграфе 6.4 доказывается ограниченность сингулярного оператора в весовом подпространстве $G_{p),\rho}(-\pi, \pi)$ и базисность возмущенной системы экспонент в $G_{p)}(-\pi, \pi)$.

Пусть $\rho : [-\pi, \pi] \to R_+$ - некоторая весовая функция. Рассмотрим оператор отождествления $T : L_{p)}(\gamma) \to L_{p)}(-\pi, \pi)$, определенный по формуле $Tf(t) := f(e^{it})$, $t \in [-\pi, \pi]$. Обозначим через $G_{p)}(\gamma)$ и $G_{p),\rho}(\gamma)$ образы $G_{p)}(-\pi, \pi)$ и $G_{p),\rho}(-\pi, \pi)$ при отображении T^{-1}.

В следующей лемме доказывается инвариантность $G_{p),\rho}(-\pi, \pi)$ относительно сингулярного оператора S_γ с ядром Коши.

Лемма 2. *Пусть* ρ *принадлежит классу* $A_p(-\pi,\pi)$. *Тогда оператор* S_γ *ограниченно действует в* $G_{p),\rho}(\gamma)$, $p>1$.

Основным результатом параграфа является

Теорема 45. *Пусть* $2\operatorname{Re}\beta+\dfrac{1}{p}\notin Z$, $1<p<+\infty$. *Тогда система* $E_\beta=\left\{e^{i(n-\beta signn)t}\right\}_{n\in Z}$ *образует базис в* $G_{p)}(-\pi,\pi)$, *тогда и только тогда, когда* $\left[2\operatorname{Re}\beta+\dfrac{1}{p}\right]=0$. *Дефект* E_β *равен* $d(E_\beta)=\left[2\operatorname{Re}\beta+\dfrac{1}{p}\right]$, *а именно: при* $d(E_\beta)<0$ *система* E_β *не полна, но минимальна в* $G_{p)}(-\pi,\pi)$; *при* $d(E_\beta)>0$ *система* E_β *полна, но не минимальна в* $G_{p)}(-\pi,\pi)$.

Автор выражает глубокую и искрению благодарность научному консультанту чл.-корр. НАНА, д.ф.-м.н., проф. Билал Тельман оглы Билалову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Выводы

Диссертационная работа посвящена изучению бесселевых, гильбертовых последовательностей, базисов Рисса и фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах относительно пространств последовательностей векторов при билинейных отображениях, получению аналогов теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости, установлению базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига, получению аналогов теорем Коровкина и их статистических вариантов в пространствах $G_{p)}$, установлению базисности системы из собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в $G_{p)}$ и в их весовых вариантах с весом общего вида, определению классов гранд Харди, установлению аналогов некоторых классических фактов и изучению вопросов разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди, а также установлению базисных свойств возмущенной системы экспонент в подпространствах $G_{p)}$ пространствах гранд Лебега.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. введены понятия b-бесселевых, b-гильбертовых последовательностей, b-базисов Рисса и b-фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах относительно банаховых пространств последовательностей векторов, обобщающие классические понятия и изучены их характеризации;

2. введены понятия несчетного безусловного базиса, несчетных бесселевых и гильбертовых систем в несепарабельных банаховых пространствах и доказаны аналоги классических результатов в этом случае, а также приведены соответствующие примеры;

3. получены обобщения теорем возмущения и устойчивости базисов и фреймов относительно b-базисов и b-фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах;

4. найдены аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости;

5. установлено существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ (q, p - сопряженные числа), $p \geq 2$;

6. доказаны базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега;

7. доказана базисность системы собственных функций дифференциального оператора одной разрывной спектральной задачи в прямой сумме пространств $G_{p)} \oplus C$, где C – комплексная плоскость;

8. доказана ограниченность сингулярного оператора в весовом пространстве $G_{p),\rho}$ в случае, когда весовая функция удовлетворяет условию Макенхоупта;

9. доказана базисность системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в весовом пространстве $G_{p),\rho}$ с весом общего вида;

10. определены классы гранд Харди $H_{p)}$, установлены аналоги теорем Рисса, Смирнова и изучены вопросы разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди;

11. полученные результаты применены к установлению базисности системы экспонент с линейной фазой в подпространствах $G_{p)}$.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Исмайлов, М.И., Исмаилов, А.Н. О b-бесселевых системах // Тезисы межд. конф. посв. 80-летию акад. Ф.Г.Максудова, – Баку: – 2010, – с. 181–182.
2. Ismailov, M.I. b-Hilbert systems // – Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2010. v.30, №2, – p. 119–122.
3. Ismailov, M.I. On b-Bessel systems // – Baku: Proceedings of NAS of Azerbaijan, – 2010. v.38, –p. 89–94.
4. Ismailov, M.I. On close b-bases // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, – 2011. v.31, №4, – p. 95–102.

5. Ismailov, M.I. On the solution for a class of third order pseudohyperbolic equations // – Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, – 2011. v.1, №1, – p. 43–53.
6. Исмайлов, М.И. О связи между b-бесселевостью и b-гильбертовостью системы // Мат. Меж. Конф., посвященной 100-ю акад. З.И.Халилова, – Баку: – 2011, – с. 175–176.
7. Исмайлов, М.И. Об эквивалентных свойствах систем, близких к b-базису в банаховых пространствах // – Баку: Вестник БГУ. Серия физико-математических наук, – 2011, № 3, – с. 57–65.
8. Ismailov, M.I. On continuability of $b_{\hat{X}}$-Bessel systems with respect to CB-space $\hat{X}$ // – Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, v.1, – 2011. № 2, – p. 1–7.
9. Ismailov, M.I. On b-frames in Banach spaces // – Madhya Pradesh: International Journal of Mathematical Archive, –2011. -2(12), – p. 2578–2584.
10. Ismailov, M.I., Garayev, T.Z. Some Generalizations of Riesz Fisher Theorem // – Bulgaria: International Journal of Mathematical Analysis, – 2011. v.5, №37, – p. 1803–1812.
11. Исмайлов, М.И. Гильбертовы обобщения b-бесселевых систем // – Саратов: Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – 2011. т. 11. Сер. Математика. Механика. Инфор., 3(2), – с. 3–10.
12. Исмайлов, М.И. Об устойчивости b-атомарного разложения // Мат. Меж. Конф., посвященной 100-ю акад. И.И.Ибрагимова, – 2012, – с. 113–115.
13. Ismailov, M.I. On perturbation of X_d-Bessel bazis in Banach spaces with respect to X_d // – Baku: Proceedings of the Institute of applied Mathematics, – 2013. v.2, №1, – p. 84–89.
14. Исмайлов, М.И. О возмущении банахового $g_{\tilde{X}}$-фрейма //– Baku: Вестник БГУ., Серия физико-математических наук, – 2013, № 4, , –с. 70–77.

15. Исмайлов, М.И. О некоторых результатах устойчивости $b_{\tilde{X}}$-атомарного разложения // – Baku: Trans. of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2014. v.34, № 1, – p. 67–72.
16. Ismailov, M.I., Garaev T.Z. b-frames, b-atomic decompositions, Banach g-frames and their perturbations under Noetherian maps // – Baku: Proceedings of NAS of Azerbaijan, – 2014. 40, 1, – p. 78–87.
17. Ismailov, M.I., Jabrailova A. On $\tilde{X}$-frames and conjugate systems in Banach spaces // – Tehran: Communications in mathematical analysis, – 2014. 1(2), – p. 19–26.
18. Ismailov, M.I., Nasibov Y.I. On One Generalization of Banach frame // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2016. 6(2), – p. 143–159.
19. Ismailov, M.I. On stability of $\tilde{X}$-Riesz basis // – Baku: International Workshop on Non-Harmonic Analysis and Differential Operators,–25-27 may, – 2016, – p. 54–55.
20. Ismailov, M.I., Guliyeva, F. and Nasibov, Y. On a generalization of the Hilbert frame generated by the bilinear mapping // – London: Journal of Function Spaces, – 2016, – p. 1-8.
21. Исмайлов, М.И. Об устойчивости непрерывных фреймов // – Баку: Вестник БГУ. Серия физико-математических наук, – 2017, № 4, – с. 72–81.
22. Bilalov, B.T., Ismailov, M.I., Nasibov, Y.I. Bessel families and uncountable frames in non-separable Hilbert spaces // – Baku: Doklady Nats. Akad. Nauk Azerbaijana, – 2018, 74(2), – p. 26-30.
23. Ismailov, M.I., Nasibov Y.I. K-Bessel and K-Hilbert systems in nonseparable Banach spaces // Proceeding of the International conference devoted to the 80-th anniversary of academician Akif Gadjiev, –6–8 december, – Baku: – 2017, – p. 100–101.
24. Исмайлов, М.И. Системы Рисса-Фишера в несепарабельных банаховых пространствах // Современные проблемы теории функций и их приложения, Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня

рождения академика П.Л.Ульянова, – Саратов: – 2018, – с. 139–140.
25. Ismailov, M.I., Nasibov Y.I. On K-Bessel and K-Hilbert systems and relations between them // Operators, functions, and systems of mathematical physics, An International Conference Dedicated to the 70-th anniversary of the birth of Hamlet Isayev/ Isaxanli, 21-24 may, Khazar University, – Baku: – 2018, – p. 166.
26. Исмайлов, М.И., Насибов, Ю. И. О разрешимости одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка // Современные методы теории краевых задач, материалы международной конференции, посвященной 90-летию В.А. Ильина, –2–6 мая, – Москва: – 2018, – с. 111.
27. Bilalov, B.T., Ismailov, M.I., Mamedova, Z.V. Uncountable Frames in Non-Separable Hilbert Spaces and their Characterization // – Баку: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2018. v.8., №1, –p.151–178.
28. Ismailov, M.I. On Bessel and Riesz-Fisher systems with respect to Banach space of vector-valued sequences // – Transilvania: Bulletin of the Transilvania University of Braşov, – 2019. v.12(61), №2, Series III: Mathematics, Informatics, Physics, –p. 303–318.
29. Ismailov, M.I. On uncountable K-Bessel and K-Hilbert systems in nonseparable Banach space // – Baku: Proceedings of NAS of Azerbaijan, – 2019. v.45, №2, p. 192–204.
30. Ismailov, M.I., Alili, V.Q. On basicity of the system of exponents in grand-Lebesgue spaces // Proceeding of the 60th anniversary of IMM of NAS of Azerbaijan, 23-25 oktyabr, – Baku: – 2019. – p. 272–274.
31. Ismailov, M.I. On Hausdorff-Young inequalities in generalized Lebesgue spaces // –Istanbul: Turkish Journal of Mathematics, – 2020. 44, №5, – p. 1757–1768.
32. Ismailov, M.I. On the Solvability of Riemann Problems in Grand Hardy Classes // – Moscow: Mathematical Notes, – 2020. v. 108, №2, – p. 55–69.

33. Zeren, Y., Ismailov, M.I., Karacam, C. On basicity of the system of exponents and trigonometric systems in the weighted grand-Lebesgue spaces // 3nd International Conference on Mathematical Advances and Applications, –24–27 june, – Istanbul: – 2020, – p. 204.
34. Zeren, Y., Ismailov, M.I., Karacam, C. Korovkin-type theorems and their statistical versions in grand Lebesgue spaces // – Istanbul: Turkish Journal of Mathematics, –2020, v.44, – p. 1027 – 1041.
35. Zeren, Y., Ismailov, M., Sirin, F. On basicity of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem in weighted grand-Lebesgue spaces // 3nd International Conference on Mathematical Advances and Applications, –24–27 june, – Istanbul: – 2020, – p. 205.
36. Zeren, Y., Ismailov, M.I., Sirin, F. On basicity of the system of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem for second order differential equation for grand-Lebesgue space // –Istanbul: Turkish Journal of Mathematics, – 2020, v.44, №5, – p. 1595–1612.

Защита диссертации состоится 29 октября 2021 года в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам 29 сентября 2021 года.

Подписано в печать: 27.09.2021
Формат бумаги: 60х84 1/16
Объём: 84000
Тираж: 70