АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ЗАДАЧИ РИМАНА В КЛАССАХ ХАРДИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ СУММИРУЕМОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К ВОПРОСАМ БАЗИСНОСТИ

Специальность: 1211.01 – Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Миран Ибрагим оглы Алескеров**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии

Баку-2022

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Гянджинского Государственного Университета.

Научный руководитель: чл.–корр. НАНА, профессор
Билал Тельман оглы Билалов

Официальные оппоненты:
доктор наук по математике, профессор
Бахрам Али оглы Алиев
доктор наук по математике, профессор
Махир Мирзахан оглы Сабзалиев
кандидат физико-математических наук, доцент
Ширмаил Гасан оглы Багиров

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
______________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.
______________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:
академик, д.ф.–м.н., профессор
______________ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки.

Почти во всех областях естествознания возникает вопрос об аппроксимации более сложных объектов менее сложными или же простыми объектами. Так, например, подобные задачи возникают в теории уравнений (напр., метод Фурье для решения уравнений в частных производных и т.п.), в спектральной теории линейных операторов, в гармоническом анализе, в теории негармонических рядов Фурье (негармонический анализ), в теории сигналов, в теории фреймов, в вейвлет анализе, в теории распознавания образов и во многих других областях. Одним из таких направлений является аппроксимация возмущенными тригонометрическими системами в различных пространствах функций. Например, при решении многих уравнений в частных производных эллиптического или же смешанного типов в специальных областях возникают возмущенные системы синусов или же косинусов, а это в свою очередь требует изучение базисных свойств (полнота, минимальность, базисность и т.п.) этих систем в различных (индуцируемых дифференциальными уравнениями) пространствах функций.

В последнее время (начиная с конца прошлого века) в связи с приложениями в конкретных задачах математики (напр., при изучении гладкостных свойств якобиана отображений), механики и математической физики интерес к изучению различных задач в нестандартных пространствах функций (напр., пространства Лебега с переменным показателем суммируемости, пространства типа Морри, “grand” пространства функций и т.п.) сильно возрос. Этому направлению посвящены монографии и обзорные статьи различных математиков. Естественно возникает потребность изучению вопросов аппроксимации в этих пространствах.

Диссертационная работа посвящена изучению базисных свойств одинарной системы экспонент

$$a(t)e^{int} - b(t)e^{-int}, \quad n \in N, \qquad (1)$$

с комплексно-значными коэффициентами $a(t) = |a(t)|e^{i\alpha(t)}$, $b(t) = |b(t)|e^{i\beta(t)}$, возмущенной системы экспонент

$$\exp[i(nt + \gamma(t) sign n)], \; n \in Z, \qquad (2)$$

и системы косинусов с единицей

$$1 \cup \cos(nt + \gamma(t)), \; n \in N, \qquad (3)$$

где $\gamma(\cdot)$, вообще говоря, комплексно-значная функция, в пространствах Лебега $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ (случаи систем (1) и (3)) и в $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ (случай системы (2)) с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$, соответственно. Тригонометрические системы являются частными случаями систем (1)-(3). Интерес к различным частным случаям последовательности (1) вызван их важным приложением к многим задачам прикладного характера. Так, вопросы спектральной теории дифференциальных операторов привели А.В.Бицадзе, В.А. Диткина, С.М.Пономарева и Е.ИМоисеева к рассмотрению аппроксимативных свойств весьма частных видов систем (1).

Частные случаи системы $\{\sin(nt - \alpha(t))\}_1^{\infty}$, где $\alpha(t)$ кусочно-гельдерева функция на отрезке $[0,\pi]$, встречаются при решении уравнений гидродинамики. В работах Габова С.А. и Крутицкого П.А. рассматривается нестационарная задача о дифракции установившейся внутренней волны на барьере, поставленном на дно канала, когда возбуждение волн происходит вследствие малых колебаний барьера. Итак, в декартовых координатах $(x;z)$ динамика малых двумерных движений экспоненциально стратифицированной вдоль оси z жидкости в приближении Буссинеска описывается уравнением Соболева

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u+\omega_0^2 u_{xx}=0;\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Рассматриваемая жидкость заполняет канал

$$\Omega=\{(x;z):-\infty<x<+\infty,\ 0<z<\pi\}.$$

Пусть

$$I=[0,\pi],\ I_1=[0,\alpha],\ \ \Gamma=\{(x;z):\ x=0,\ z\in I\},$$
$$\Gamma_1=\{(x;z):\ x=0,\ z\in I_1\},$$

Задача. Найти $u(x;z;t)$, определенную и непрерывную в $\overline{\Omega}\times[0,\infty)$, удовлетворяющую в классическом смысле в $(\Omega\setminus\Gamma)\times(0,\infty)$ уравнению $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u+u_{xx}=0$, начальным условиям $u(x;z;0)=u_t(x;z;0)\equiv 0$, $\forall(x;z)\in\Omega$; граничным условиям $u/_{z=0}=u/_{z=\pi}=0$ не протекания на стенках канала Ω, граничным условиям на Γ_1: $u=f(t;z)$, где $f(t;z)\in C_0^{(2)}$ $[[0,\infty),C^{(2,\lambda)}(I_1)],\lambda\in(0,1]-$ коэффициент Гельдера.

При построении явного решения этой задачи используется разложимость заданной функции по системе

$$V_n(z)=\begin{cases}\sin nz, z\in I_1;\\ \cos nz, z\in I\setminus I_1.\end{cases}$$

При желании рассмотреть аналогичную задачу в соболевских пространствах возникает необходимость изучению базисных свойств системы $\{V_n\}_{n\in N}$ в соответствующих пространствах функций.

Базисные свойства систем (1)-(3) в пространствах Лебега L_p, $1<p<+\infty$, полностью изучены в работах Б.Т.Билалова. Базисности систем синусов $\{\sin(n-\alpha)t\}_{n\in N}$ и косинусов $\{\cos(n-\alpha)t\}_{n\in Z_+}$, где $\alpha\in R-$ действительный параметр, в пространствах Лебега $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$, изучены в работах Б.Т. Билалова и З.Г. Гусейнова. При этом, сперва изучается базисность системы экспонент $\{\exp i(n-\alpha\, sign n)t\}_{n\in Z}$ в пространствах $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$, а затем используя эти результаты получаются условия базисности соответствующих систем синусов и косинусов. Т.Р.Мурадов рассмотрел систему экспонент $\{\exp i(nt-\alpha(t) sign\, n)\}_{n\in Z}$, где $\alpha(\cdot)-$кусочно-гелдерева функция на отрезке $[-\pi,\pi]$, и им найдено достаточное условие базисности этой системы в пространствах $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$.

В работах Н.П. Насибовой рассматривается система экспонент вида $\{\exp i(nt+\gamma(t) sign n)t\}_{n\in Z}$, где $\gamma(t)=\alpha t+\beta sign t$, $\alpha;\beta\in R-$кусочно-линейная функция. Находятся достаточные условия на параметры α и β, при выполнении которых эта система образует базис в весовом пространстве $L_{p(\cdot),\rho}(-\pi,\pi)$, когда вес $\rho(\cdot)$ имеет степенной вид.

В данной работе рассматриваются системы (1)-(3) в пространствах Лебега $L_{p(\cdot)}$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$.

Рассматривается случай, когда $\arg a(t), \arg b(t)$ и $\gamma(t)-$ кусочно-непрерывные функции, причем могут иметь бесконечное число точек разрывов первого рода. Для изучения базисных свойств этих систем применяется метод краевых задач Римана теории аналитических функций. В отличие от обычных случаев, рассмотренная нами краевая задача имеет специфические особенности, а именно коэффициент задачи и ее правая часть удовлетворяют определенным соотношениям. А эта особенность в свою очередь влияет на разрешимость этой же задачи в классах Харди с переменным показателем суммируемости, и заодно также влияет на условия базисности систем (1)-(3) в пространствах $L_{p(\cdot)}$.

Объект и предмет исследования.

Пространства Лебега с переменным показателем суммируемости, классы Харди с переменным показателем суммируемости, краевые задачи Римана, базисность возмущенных тригонометрических систем.

Цель и задачи исследования.

Основной целью работы является установление разрешимости краевых задач Римана со сдвигом Карлемана в классах Харди с переменным показателем суммируемости, получение необходимых и достаточных условий на скачки аргументов коэффициентов задачи, которые будут обеспечивать базисность рассматриваемых одинарных систем степеней в пространствах Лебега $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ с переменным показателем $p(\cdot)$.

Методы исследования.

Подход к решению такого рода берет начало с одной заметки А.В.Бицадзе. Он заключается в том, что основная задача сводится к решению некоторой задачи сопряжения в соответствующих классах аналитических функций. Этим подходом успешно пользовались следующие авторы: С.М.Пономарев, Е.И.Моисеев, А.Н.Барменков, Г.Г.Девдариани, Б.Т.Билалов и др. Метод исследования, приведенный в данной работе, является дальнейшим обобщением метода, предложенного Б.Т.Билаловым.

Основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава диссертационной работы носит подготовительный характер для получения основных результатов. В ней определяются пространство Лебега и классы Харди с переменным показателем суммируемости и приводятся их основные свойства. Рассматривается специальная задача Римана со сдвигом Карлемана на единичной окружности, находятся достаточные условия относительно коэффициентов задачи для разрешимости этой задачи в рассматриваемых классах Харди.

Во второй главе результаты, полученные в первой главе, применяются к вопросам базисности одинарных систем экспонент в пространствах Лебега $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$ на $(0,\pi)$. Эти системы являются обобщениями возмущенных систем синусов и косинусов, возникающих в теории дифференциальных уравнений.

В дополнение рассматривается один аналог известной теоремы Рисса относительно классов H_p^+, а именно доказывается ее справедливость относительно произвольного измеримого подмножества $(-\pi,\pi)$.

Научная новизна исследования. В работе получены следующие основные результаты:

- рассматривается однородная задача Римана в случае, когда коэффициент задачи удовлетворяет некоторому условию на полуокружности, строится общее решение этой задачи при определенных условиях на коэффициент задачи;

- рассматривается неоднородная задача Римана, когда коэффициент задачи и ее правая удовлетворяют конкретным условиям на полуокружности, находится достаточное условие для разрешимости этой задачи в классах Харди с переменным суммируемости;

- рассматривается одинарная система экспонент (1) с комплексно-значными коэффициентами $a(t), b(t)$, когда аргументы $\arg a(t)$ и $\arg b(t)$ могут иметь бесконечное число точек разрыва первого рода на $[0,\pi]$, находится достаточное и необходимое условие на скачки функции $\arg a(t)-\arg b(t)$, при выполнении которого эта система образует базис в $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$;

- рассматривается система экспонент (2) с кусочно – непрерывной фазой $\gamma(\cdot)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$, которая нечетна на $[-\pi,\pi]$ и может иметь бесконечное число точек разрыва первого рода, находится достаточное условие на скачки функции $\gamma(\cdot)$, при выполнении которого эта система образует базис в $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$;

- рассматривается система косинусов (3) с кусочно-непрерывной фазой $\gamma(\cdot)$; используя результаты относительно системы экспонент (2), находится необходимое и достаточное условие для базисности системы (3) в $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$.

Теоретическая и практическая ценность исследования.

Результаты диссертационной работы имеют приложения при построении явного решения некоторых задач гидродинамики, в спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов, в теории аппроксимации, в теории приближения в областях комплексной плоскости, в теории негармонических рядов Фурье и др.

Апробация и применение.

Основные результаты диссертационной работы докладывались: на семинаре отдела «Негармонический анализ» ИММ НАНА (чл.-корр. НАНА, проф. Б.Т.Билалов), 7-th International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equation & Their Applications MADEA-7 (2015, г. Баку), International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators (2016, г. Баку), "Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics" (2019, Bakı), International conference, 4-th International Conference on Mathematical Advances and Application (2021, Istanbul).

Личный вклад автора.

Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются личным вкладом автора.

Публикации автора.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Азербайджанской Республики -6 (из них 3 SCOPUS, 1 Zentralblatt MATH), материалы конференций -5 (из них 5 международная, 2 за рубежом)..

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа.

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический Анализ» Гянджинского Государственного Университета.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности).

Общий объем диссертационной работы ~ 201489 знаков (титульная страница – 395 знаков, содержание 1094 знаков, введение ~ 56000 знаков, первая глава ~ 60000 знаков, вторая глава ~ 82000 знаков, выводы - 4000). Список используемой литературы состоит из 97, наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приведено краткое содержание полученных результатов.

Первая глава в целом посвящена изучению разрешимости специальных краевых задач Римана в классах Харди с переменным показателем суммируемости.

Сперва рассматривается однородная задача Римана в случае, когда коэффициент задачи удовлетворяет конкретному условию на сегменте $[-\pi,\pi]$, иначе говоря, значения коэффициента на $(-\pi,0)$ определяются через его же значений на $(0,\pi)$ специальным образом. Допускается, что аргумент коэффициента может иметь бесконечное число точек разрыва первого рода. При определенных условиях на аргумент коэффициента, строится общее решение однородной задачи Римана. Специальный вид коэффициента позволяет расширить условие на аргумент коэффициента, в отличие от обычного случая. Затем рассматривается неоднородная задача Римана, когда коэффициент задачи и ее правая часть удовлетворяют специальным условиям. Находится достаточное условие разрешимости неоднородной задачи в классах Харди с переменным показателем суммируемости, когда правая часть принадлежит пространству Лебега $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$. Эти условия отличны от условия тех случаев, когда коэффициент задачи и ее правая часть независимо определены на всем отрезке $[-\pi,\pi]$.

В **1.1** приведены стандартные обозначения, основные понятия теории базисов, а также некоторые сведения из теории интегралов типа Коши.

Нам понадобятся некоторые сведения из теории пространств Лебега с переменным показателем суммируемости. Пусть $p:[-\pi,\pi]\to[1,+\infty)$ – некоторая измеримая по Лебегу функция. Класс всех измеримых на $[-\pi,\pi]$ (относительно лебеговой меры) функций обозначим через $\mathcal{L}_0$. Примем обозначение

$$I_p(f)\overset{def}{\equiv}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p(t)}dt.$$

Пусть

$$\mathcal{L}\equiv\{f\in\mathcal{L}_0 : I_p(f)<+\infty\}.$$

Относительно обычных линейных операций сложение функций и умножение на число, при $p^+=\sup\underset{[-\pi,\pi]}{vrai}\, p(t)<+\infty$, $\mathcal{L}$ превращается в линейное пространство. Относительно нормы

$$\|f\|_{p(\cdot)}\overset{def}{\equiv}\inf\left\{\lambda>0 : I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right)\le 1\right\},$$

$\mathcal{L}$ является банаховым и его обозначим через $L_{p(\cdot)}$. Положим

$$WL\overset{def}{\equiv}\Big\{p : p(-\pi)=p(\pi);\exists C>0,\quad \forall t_1,t_2\in[-\pi,\pi]:|t_1-t_2|\le\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|p(t_1)-p(t_2)|\le\frac{C}{-\ln|t_1-t_2|}\Big\}.$$

Везде $q(\cdot)$ обозначает сопряженную к $p(\cdot)$ функцию: $\frac{1}{p(t)}+\frac{1}{q(t)}\equiv 1$. Примем $p^- = \inf\limits_{[-\pi,\pi]} vrai\, p(t)$, $p^+ = \sup\limits_{[-\pi,\pi]} vrai\, p(t)$.

Определим классы Харди $H^{\pm}_{p(\cdot)}$. Через $H^+_{p_0}$ обозначаем обычный класс Харди, где $p_0 \in [1,+\infty)-$ некоторое число. Положим

$$H^{\pm}_{p(\cdot)} \equiv \left\{ f \in H^+_1 : f^+ \in L_{p(\cdot)}(\partial\omega) \right\},$$

где $f^+ -$некасательные граничные значения $f(\cdot)$ на $\partial\omega$.

Аналогично классическому случаю определяется весовой класс Харди ${}_mH^-_{p(\cdot)}$ аналитических в $C\setminus\overline{\omega}$ функций, имеющих порядок $k \le m$ на бесконечности. Пусть $f(z)$ аналитическая на $C\setminus\overline{\omega}$ функция, имеющая конечный порядок $k \le m$ на бесконечности, т. е.

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где $f_1(z)$ полином степени $k \le m$, $f_2(z)$ правильная часть разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Если функция $\varphi(z) \equiv \overline{f_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ принадлежит классу $H^+_{p(\cdot)}$, то будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу ${}_mH^-_{p(\cdot)}$.

Рассмотрим следующую задачу Римана в классах $H^+_{p(\cdot)} \times {}_mH^-_{p(\cdot)}$:

$$F^+(\tau) - G(\tau)F^-(\tau) = f(\tau), \tau \in \partial\omega, \tag{4}$$

где $f \in L_{p(\cdot)} -$некоторая функция. Под решением задачи (4) понимается пара аналитических функций $(F^+(z); F^-(z)) \in H^+_{p(\cdot)} \times {}_mH^-_{p(\cdot)}$, граничные значения которых п.в. на $\partial\omega$ удовлетворяют равенство (4).

Нам также понадобится понятие задачи сопряжения со сдвигом. Пусть $\partial\omega$ единичная окружность и $\eta : \partial\omega \leftrightarrow \partial\omega$ некоторый сдвиг. Под сдвигом на $\partial\omega$ будем понимать взаимнообратное и непрерывное отображение $\partial\omega$ на себя. Под ориентацией на $\partial\omega$ будем понимать положительное направление, т.е. направление, относительно которого единичный шар остается слева. Сдвиги, которые меняют ориентацию, обычно называют карлемановскими. Таким образом, сдвиги бывают двух видов: карлемановские и некарлемановские.

Пусть $\eta:\partial\omega\to\partial\omega-$некоторый карлемановский сдвиг. Рассмотрим следующую задачу сопряжения со сдвигом

$$F_1^+(\tau)-G(\tau)F_2^+(\eta(\tau))=g(\tau),\tau\in\partial\omega. \qquad (5)$$

Под решением задачи (5) в классах Харди $H_p^+\times H_p^+$ понимают пару функций $(F_1;F_2)\in H_p^+\times H_p^+$, некасательные граничные значения которых удовлетворяют соотношению (5) п.в. на $\partial\omega$.

В **1.2** рассматривается специальная однородная краевая задача Римана, коэффициент которой имеет бесконечное число разрывов. При определенных условиях на коэффициент задачи доказывается нетеровость этой задачи и строится общее решение в классах Харди с переменным показателем суммируемости.

Пусть функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям.

i) $a^{\pm1}(\cdot);b^{\pm1}(\cdot)\in L_\infty(0,\pi)$;

ii) $\alpha(\cdot);\beta(\cdot)-$кусочно-непрерывные на $(0,\pi)$ функции с точками разрыва $\{t_k\}_{k\in N}$ и $\{\tau_k\}_{k\in N}$, соответственно. Предположим, что множество $\{\widetilde{s}_k\}\equiv\{t_k\}\cup\{\tau_k\}$ может иметь единственную предельную точку $\widetilde{s}_0\in(0,\pi)$ и функция $\widetilde{\theta}(t)\equiv\beta(t)-\alpha(t)$ имеет в точке $\widetilde{s}_0$ справа и слева конечные пределы.

iii) $\sum_{k=1}^{\infty}|h(\widetilde{s}_k)|<+\infty$, где $h(\widetilde{s}_k)=\widetilde{\theta}(\widetilde{s}_k-0)-\widetilde{\theta}(\widetilde{s}_k+0)-$ скачки функции $\widetilde{\theta}(\cdot)$ в точках $\widetilde{s}_k$.

iv) Скачки $\{\tilde{h}_i\}$ удовлетворяют соотношению

$$\left(\frac{\tilde{h}(\tilde{s}_i)}{2\pi}+\frac{1}{p(\tilde{s}_i)}\right)\notin Z,\ \ \forall i\in N\,.$$

Определим

$$G\left(e^{it}\right)=\begin{cases} b(t)a^{-1}(t), 0<t<\pi, \\ \\ a(-t)b^{-1}(-t), -\pi<t<0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую однородную краевую задачу Римана в классах $H^{+}_{p(\cdot)}\times_m H^{-}_{p(\cdot)}$:

$$F^{+}(\tau)+G(\tau)F^{-}(\tau)=0,\quad \tau\in\partial\omega,$$

Обозначим $\theta(t)=\arg G\left(e^{it}\right)$. Предположим, что имеют место неравенства

$$-\frac{2\pi}{p(s_i)}<\tilde{h}_i<\frac{2\pi}{q(s_i)},\ i=\overline{1,\infty}\ ,$$

$$-\frac{\pi}{p(0)}<\alpha(0)-\beta(0)<\frac{\pi}{q(0)}. \tag{6}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть* $\{\tilde{s}_k\}\subset[-\pi,\pi]$ – *множество различных точек, имеющее разве лишь единственную предельную точку* $\tilde{s}_0\in(-\pi,\pi)$, *множество чисел* $\{\tilde{h}_k\}$ *удовлетворяют условию iii) и неравенствам (6). Тогда бесконечное произведение*

$$\psi(s)=\prod_{k=0}^{\infty}\left\{\sin\left|\frac{s-\tilde{s}_k}{2}\right|\right\}^{\frac{h(\tilde{s}_k)}{2\pi}},\ \ s_0=0\,,$$

принадлежит пространству $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$.

Рассмотрим следующие аналитические внутри (знак «+») и вне (знак «-») единичного круга ω функции $X_1(\cdot)$:

$$X_1(z)=\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|G\left(e^{it}\right)\right|\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt\right\},$$

$$X_2(z)=\exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt\right\}.$$

Определим

$$Z_k(z)\equiv\begin{cases}X_k(z), & |z|<1,\\ \left[X_k(z)\right]^{-1}, & |z|>1,\ k=1,2;\end{cases}$$

и положим

$$Z(z)=Z_1(z)Z_2(z).$$

Функцию $Z(\cdot)$ назовем каноническим решением однородной задачи

$$F^+(\tau)-G(\tau)F^-(\tau)=0,\quad \tau\in\partial\omega. \qquad (7)$$

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть относительно коэффициента* $G\left(e^{it}\right)$ *задачи (7) выполнены условия i)-iii);* $p\in WL, 1<p^-\le p^+<+\infty$, *и скачки* $\{h_k\}_0^\infty$ *функции* $\arg G\left(e^{it}\right)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{1}{q(s_k)}<\frac{h_k}{2\pi}<\frac{1}{p(s_k)}\quad,\ k\in N;\\ &-\frac{1}{q(\pi)}<\frac{h_0}{2\pi}<\frac{1}{p(\pi)}\quad.\end{aligned}\right\}$$

Тогда общее решение однородной задачи Римана (7) в классах $\left(H^+_{p(\cdot)};\ {}_mH^-_{p(\cdot)}\right)$ *имеет вид* $F(z)\equiv Z(z)P_m(z)$, *где* $Z(z)$ *каноническое решение однородной задачи,* $P_m(z)$ *произвольный полином степени* $\le m$.

В **1.3** рассматривается неоднорадная краевая задача Римана теории аналитических функций, приспособленной к системе (1). Рассматривается случай, когда аргумент коэффициента краевой задачи кусочно-непрерывен на единичной окружности, причем может иметь бесконечное число точек разрывов первого рода. При определенных условиях на соответствующие скачки аргумента, изучается разрешимость неоднородной задачи Римана в обобщенных классах Харди с переменным показателем суммируемости.

Рассмотрим следующую неоднородную задачу Римана

$$\begin{cases} F^{+}(\tau)+G(\tau)F^{-}(\tau)=\Psi(\tau), \quad \tau\in\gamma, \\ F(\infty)=0, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\Psi(t)=\begin{cases} A^{-1}(t)\psi(t), \ t\in(0,\pi), \\ -B^{-1}(-t)\psi(-t), t\in(-\pi,0), \end{cases}$$

$\psi\in L_{p(\cdot)}(0,\pi)-$некоторая функция. Предположим, что выполнены следующие неравенства

$$-\frac{1}{q(s_k)}<\frac{h_k}{2\pi}<\frac{1}{p(s_k)},\forall k;$$

$$-\frac{1}{p(\pi)}<\frac{\beta(\pi)-\alpha(\pi)}{\pi}<\frac{1}{q(\pi)}. \tag{9}$$

Доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $p\in WL\wedge p^{-}>1$ *и функции* $a(\cdot),b(\cdot)$ *удовлетворяют условиям i)-iii). Если выполнены неравенства (9) и справедливы соотношения*

$$\frac{1}{p(0)}-2<\frac{\beta(0)-\alpha(0)}{\pi}<\frac{1}{p(0)},$$

$$-\frac{1}{p(\pi)}<\frac{\beta(\pi)-\alpha(\pi)}{\pi}<-\frac{1}{p(\pi)}+2,$$

то интеграл типа Коши

$$F(z)=\frac{Z(z)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Psi(\sigma)}{Z^{+}(e^{i\sigma})}\frac{d\sigma}{1-e^{i\sigma}z},$$

является решением задачи Римана (8) в классах $H^{+}_{p(\cdot)}\times_{-1}H^{-}_{p(\cdot)}$.

Глава II полностью посвящена изучению базисных свойств систем (1)-(3) в пространствах Лебега $L_{p(\cdot)}$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$. Сперва рассматривается одинарная система экспонент (1) с комплексно-значными коэффициентами $a(t)$ и $b(t)$ на отрезке $[0,\pi]$. Предполагается, что функции $\arg a(t)$ и $\arg b(t)$ могут иметь бесконечное точек разрыва первого рода на $(0,\pi)$. Вопрос базисности системы (1) в $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ сводится к изучению разрешимости специальной краевой задачи Римана в классах Харди с переменным показателем суммируемости. К рассматриваемой краевой задаче применяются результаты, полученные в Главе I, получается необходимое и достаточное условие на скачки функции $\arg a(t)-\arg b(t)$, при выполнении которого система (1) образует базис в $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$. Применяются эти результаты к частным случаям системы (1).

В **2.1** рассматривается одинарная система экспонент с комплексно–значными коэффициентами.

Рассмотрим следующую одинарную систему экспонент

$$v_n(t) \equiv a(t)e^{\text{int}} - b(t)e^{-\text{int}}, n \in N,$$

с комплексно – значными коэффициентами $a(\cdot); b(\cdot) : [0,\pi] \to C$.

Предположим, что при некотором n_0 выполняется неравенство

$$\frac{1}{p(0)} + 2(n_0 - 1) < \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{\pi} < \frac{1}{p(0)} + 2n_0. \tag{10}$$

Исходя из условия iv) определим целые числа $n_i, i = \overline{1,r}$, из следующих соотношений

$$-\frac{1}{p(s_i)} < \frac{h(s_i)}{2\pi} + n_i - n_{i-1} < \frac{1}{q(s_i)}, i = \overline{1,r}. \tag{11}$$

Справедлива следующая основная

Теорема 3. *Пусть коэффициенты $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ системы $\{v_n\}_{n\in N}$ удовлетворяют условиям i)-iv), целые числа $\{n_i\}_1^r$ определяются из соотношений (10), (11). Предположим , что имеет место*

$$\frac{\beta(\pi)-\alpha(\pi)}{2\pi}+\frac{1}{2p(\pi)}\notin Z .$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$-\frac{1}{p(\pi)}+2n_r<\frac{\beta(\pi)-\alpha(\pi)}{\pi}<-\frac{1}{p(\pi)}+2(n_r+1),$$

то система $\{v_n\}_{n\in N}$ *образует базис в* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *. При этом, если*

$$\beta(\pi)-\alpha(\pi)<-\frac{\pi}{p(\pi)}+2n_r\pi,$$

то система $\{v_n\}_{n\in N}$ *не полна в* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$, *но минимальна в нем; при выполнении неравенства*

$$\beta(\pi)-\alpha(\pi)>-\frac{\pi}{p(\pi)}+2(n_r+1)\pi,$$

она полна, но не минимальна в $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ *.*

В **2.2** рассматривается система экспонент (2) с кусочно-непрерывной и нечетной фазой $\gamma(t)$ на $[-\pi,\pi]$. Используя результаты 2.1, устанавливается необходимое и достаточное условие базисности этой системы в пространствах $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$.

Рассмотрим следующую систему экспонент

$$\varphi_n(\theta)\equiv\exp[i(n\theta-\operatorname{sgn} n\,\alpha(\theta))],\quad n=\pm1,\pm2,..., \tag{12}$$

где $\alpha(\theta)-$кусочно–непрерывная, нечетная функция на отрезке $[-\pi,\pi]$, т.е. $\alpha(-\theta)=-\alpha(\theta)$, $\forall\,\theta\in[-\pi,\pi]$. Пусть множество $\{t_k\}_1^\infty$ есть точки разрыва первого рода функции $\alpha(\theta)$ на $(0,\pi)$, причем имеет единственную предельную точку $t_0\in(0,\pi)$. Предположим, что функция $\alpha(\theta)$ в точке t_0 справа и слева имеет конечные пределы. Более того, пусть имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha(t_k+0)-\alpha(t_k-0)\right|<+\infty . \tag{13}$$

Предположим, что выполнено соотношение

$$\frac{\alpha(t_i-0)-\alpha(t_i+0)}{\pi}\neq-\frac{1}{p(t_i)}+k,\qquad i=\overline{1,\infty},\qquad(14)$$

для любого целого k. Пусть при некотором целом n_0 имеет место

$$\frac{\pi}{2p(0)}+\left(n_0-\frac{1}{2}\right)\pi<\alpha(0)<\frac{\pi}{2p(0)}+n_0\pi\,.\qquad(15)$$

Обозначим через r – номер, после которого выполняется следующие условия

$$-\frac{\pi}{p(t_k)}<\alpha(t_k-0)-\alpha(t_k+0)<\frac{\pi}{q(t_k)},$$

$k=\overline{r,\infty}$. Перенумеруем элементы множества $\{t_i\}$, $i=\overline{1,r}$, по возрастанию и обозначим снова через $\{t_i\}_1^r$, $0<t_1<\ldots<t_r<\pi$.

Определим целые числа n_i, $i=\overline{1,r}$, из следующих условий

$$-\frac{1}{p(t_i)}<\frac{\alpha(t_i-0)-\alpha(t_i+0)}{\pi}+n_i-n_{i-1}<\frac{1}{q(t_i)},\quad i=\overline{1,r}\,.\qquad(16)$$

Теорема 4. *Пусть $\alpha(t)$ действительная, кусочно-непрерывная, нечетная функция на отрезке $[-\pi,\pi]$, относительно разрывов которой справедливы условия (13)-(15). Целые числа n_i, $i=\overline{1,r}$, определяются из условий (15) и (16). Пусть при этом имеет место*

$$\alpha(\pi)\neq-\frac{\pi}{2p(\pi)}+\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\pi\,.$$

Тогда, для того, чтобы система экспонент (12) являлась базисом в пространстве $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-\frac{\pi}{2p(\pi)}+\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\pi<\alpha(\pi)<-\frac{\pi}{2p(\pi)}+(n_r+1)\pi\,.$$

Причем, если

$$\alpha(\pi) < -\frac{\pi}{2p(\pi)} + \left(n_r + \frac{1}{2}\right)\pi ,$$

то система (12) не полна в $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$*, но минимальна; при*

$$\alpha(\pi) \geq -\frac{\pi}{2p(\pi)} + (n_r + 1)\pi ,$$

полна в $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$*, но не минимальна.*

В 2.3 рассматривается возмущенная система косинусов с кусочно-непрерывной фазой. Находятся достаточные условия на скачки фазы, при выполнении которых эта система образует базис в обобщенных пространствах Лебега.

В **2.4** доказывается справедливость теоремы Рисса о функциях из класса Харди относительно произвольного измеримого подмножества единичной окружности.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю чл-корр. НАН Азербайджана, профессору Б.Т.Билалову за постановки задач и постоянное внимание к работе.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа в целом посвящена изучению базисных свойств одинарной системы экспонент с комплексно-значными коэффициентами, возмущенной системы экспонент и системы косинусов с единицей в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости.

В работе получены следующие основные результаты:

- рассматривается однородная задача Римана в случае, когда коэффициент задачи удовлетворяет некоторому условию на полуокружности, строится общее решение этой задачи при определенных условиях на коэффициент задачи;

- рассматривается неоднородная задача Римана, когда коэффициент задачи и ее правая удовлетворяют конкретным условиям на полуокружности, находится достаточное условие для разрешимости этой задачи в классах Харди с переменным суммируемости;

- рассматривается одинарная система экспонент (1) с комплексно-значными коэффициентами $a(t), b(t)$, когда аргументы $\arg a(t)$ и $\arg b(t)$ могут иметь бесконечное число точек разрыва первого рода на $[0,\pi]$, находится достаточное и необходимое условие на скачки функции $\arg a(t)-\arg b(t)$, при выполнении которого эта система образует базис в $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$;

- рассматривается система экспонент (2) с кусочно – непрерывной фазой $\gamma(\cdot)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$, которая нечетна на $[-\pi,\pi]$ и может иметь бесконечное число точек разрыва первого рода, находится достаточное условие на скачки функции $\gamma(\cdot)$, при выполнении которого эта система образует базис в $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$;

- рассматривается система косинусов (3) с кусочно-непрерывной фазой $\gamma(\cdot)$; используя результаты относительно системы экспонент (2), находится необходимое и достаточное условие для базисности системы (3) в $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Наджафов, Т.И, Алескеров, М.И. Об одной задаче Римана в обобщенных классах Харди // Нахчыванский Государственный Университет, Научные труды, сер. физ. мат и техн. наук. №9 (65), -2015. с. 3-12.
2. Najafov, T.I., Aleskerov, M.I. On a Riemann problem in a generalized Hardy classes // 7-th International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", MADEA -7, -Baku: - 08-13 September, -2015, -p. 126
3. Mirzoyev, V.S., Aleskerov, M.I. On a special nonhomogeneous Riemann problem in generalized Hardy classes.// International Journal of Mathematical Analysis -2016. v. 10, № 20, pp. 965 – 979
4. Quliyeva, A.A., Alasgarov, M. On the solvability of the homogeneous Riemann problem // International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators, - Baku: -25-27 May, -2016, -pp. 93-94
5. Bilalov, B.T., Huseynli, A.A., Aleskerov, M.I. On the basicity of unitary system of exponents in the variable exponent Lebesgue spaces // -Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, issue Mathematics, -2017. v. XXXVII, № 1, - pp. 1-14
6. Bilalov, B.T., Yusuf Zeren, Aleskerov, M.I. On weighted Zorko subspaces and Riesz type theorems for analytic functions // -Baku: The reports of National Academy of Sciences of Azerb., -2018. v. LXXIV, - pp. 18-21
7. Касумов, З.А., Алескеров, М.И. О базисности возмущенной системы косинусов в обобщенных пространствах Лебега // “Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics” Conference International conference, -Baku: Khazar university, -10-14 June, -2019, -p.167-168.
8. Aleskerov, M.I. An analogue of the Riesz theorem in Hardy-Morrey classes // -Baku: Transactions of ANAS. Series of Physical - Technical and Mathematical Sciences, -2020. v. 40, №1, -pp. 54-60
9. Aleskerov, M.I. On basicity of a perturbed system of cosines with unit in generalized Lebesgue spaces // Journal of Contemporary Applied Mathematics, -2020., v. 10, № 1, - pp. 46-57.

10. Aleskerov, M.I. On basis properties of a perturbed system of cosines in generalized Lebesgue spaces // 4th International E-Conference on “Mathematical Advances and its Applications”, -Istanbul,- Turkey: -26-29 May, -2021, -p. 144
11. Aleskerov, M.I. An analogue of the Riesz theorem in Hardy-Morrey classes // 4th International E-Conference on Mathematical Advances and its Applications, -Istanbul, Turkey: -26-29 May,-2021, -p. 145.

Защита диссертации состоится **24 июня 2022** года в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **23 мая 2022 года.**

Подписано в печать: 13.05.2021
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 38027
Тираж: 70