АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЛЕНИЙ СЛОЖНЫХ СУММАРНЫХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Специальность: 1208.01 – Теория вероятности

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Нейманов Эльбрус Мелик оглу**

АВТОРЕФЕРАТ

на соискание ученой степени доктора философии

Баку-2021

Диссертация выполнена в Институте Систем Управления НАН Азербайджана.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Тамилла Хилал гызы Насирова**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Фада Ганнан оглу Рагимов**

кандидат физико-математических наук, доцент
Тофик Мовсумович Алиев

кандидат физико-математических наук, доцент
Тарана Абульфаз гызы Алиева

Диссертационный совет ED 1.19 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующей на базе Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Председатель диссертационного совета: доктор математических наук, профессор: **Галина Юрьевна Мехтиева**

____

Ученый секретарь диссертационного совета: Доктор философии по математике, доцент **Сабзиев Эльхан Нариман**

____

Председатель научного семинара: доктор математических наук, профессор: **Алиев Солтан Али**

____

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию процессов, связанных со случайными блужданиями, построенными по суммам независимых случайных величин и с отражающим экраном. Такие процессы называются процессами полумарковского блуждания с отражающим экраном

С одной стороны потребность приложений - теории надежность, теории массового обслуживания, теории управления запасами, теории страхования, военного дела и т.д. и с другой стороны, внутренняя логика развития теории вероятностей требуют изучения более сложных процессов, чем скачкообразных марковских процессов, например сложных суммарных процессов полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле. Предложены разные модели исследования. Интерес к этим исследованиям вызван их широким практическим применением. Ведутся интенсивные исследования указанной модели, получены интересные резултаты, которые находят широкое применение на практике. В этом направлении важные результаты получены А. В. Скороходом, Б.П Харламовым, В.С.Королюком, А.Ф.Турбином, В.М.Щуренковым, А.А.Боровковым, В.В.Гусаком, Т.И.Насировой, Т.А.Ханиевым и др. Построение математических моделей реальных физических процессов выдвинуло на первый план проблемы, связанные с исследованием случайных процессов, порождаемых последовательностями случайных величин. В этих задачах физические процессы описываются марковскими процессами, полумарковскими блужданиями и процессами, полученными из них с помощью простых преобразований, таких как добавление постоянного сноса, наличие задерживающего экрана, суммирование случайных процессов. В значительной степени реальные процессы, изучаемые с помощью вероятностных методов, по своей природе связаны с чередованием событий случайной продолжительности.

Однако, в случае марковского процесса длительность пребывания системы в некотором состоянии зависит лишь от этого состояния и имеет обязательно экспоненциальное распределение. В реальном мире длительность пребывания системы в данном состоянии зависит и от состояния, в которое перейдет процесс. Распределения длительности пребывания в состоянии может быть произвольным. Поэтому появилась необходимость рассматривать процессы, хотя и не являющиеся марковскими, но имеющие марковские моменты, в которых информация о прошлой эволюции процесса не влияет на его будущую эволюцию.

В отличии от марковских процессов полумарковские процессы может находиться в фиксированным состоянии очень долго и распределение времени в этом положении может иметь любой закон. А также этот интервал времени зависит не только от данной положений и еще от следующего положения. Зарубежом только А.Баровков, В.Феллер в своих роботах посмотрели поглощающих экранах. Здесь система как только приходить к фиксированный экрану, процесс останавливается. По теме полумарковские процессы с задерживающим экраном в нуле Азербайджане Т.Насирова Т.Ханыев, Р.Алыев, Т.Алыева, Ш.Бабаев, К.Омарова, Э.Ибаев, У.Керимова, Б.Шамилова и.т.д написали много научные работы. В диссертации исследуются полумарковские процессы на отражающем экране. Предположим, что на складе есть определенный объем. В случайные моменты времени на склад приходит случайное количество товара и товар забирается со склада. Возможны два случая. Принятие заявки и, конечно, непринятие заявки. спрос. Во втором случае, если нет возможности удовлетворить спрос, отдать товар на складе и сказать, что нет ничего. В этом случае мы оговариваем, что процесс постоянный. То есть требуемый товар найдены и доставлены откуда угодно. С помощью сложных процессов можно найти вероятность первого заполнения или опорожнения склада. На практике мы часто сталкиваемся с отражающим процессом. Например, на поле боя есть несколько снарядов. Если какая-то его часть выходит из строя, место следует немедленно заполнить. Это единственный способ обеспечить победу. Поэтому уже один этот факт показывает, что процесс отражения очень актуален для науки.

Цель и задачи исследования: Построение сложные суммарные процессы полумарковского блуждания с отражающим экраном. Составить интегральное уравнение для преобразования Лапласа-Стильтеса функция распределения полумарковского процессов с отражающим экраном в нуле. Решить интегральное уравнение для преобразования Лапласа - Стильтеса функция распределения полумарковского процессов с отражающим экраном в нуле. Получить дифференциальное уравнение для преобразования Лапласа-Стильтеса функция распределения полумарковского процессов с отражающим экраном в нуле и его решить. Целью роботы дать метод изучения распределения сложных суммарных процессов полумарковского блуждании с отражающим экраном в нуле и найти их основных граничных функционалов, как преобразование Лапласа по времени и преобразование Лапласа-Стильтеса по фазе условного и безусловного совместного распределения процесса полумарковского блуждания момента некоторого уровня первого пересечения и перескока через этот уровень.

Найти производящая функция числа скачков, при котором сложный суммарный процесс впервые достигает уровня “a”(a>0). Найти производящая функция числа скачков, при котором сложный процесс впервые достигает уровня нуль

Найти в полосе [c, d] распределения пребывания длительности времени полумарковские процессы

Методы исследования: В диссертации применяются методы теория вероятности и функционального анализа

Основные положения, выносимые на защиту В диссертации получены следующие результаты:

1. Построен сложный суммарный процесс с отражающим экраном.
2. Найдено преобразование Лапласа-Стильтеса функции распределения полумарковского процесса с отражающим экраном

3. Найдено явные виды преобразование Лапласа по времени и преобразование Лапласа-Стильтьеса по фазе условного и безусловного распределений процесса полумарковского блуждания момента некоторого уровня первого пересечения и перескока через этот уровень.
4. Найдено производящая функция числа скачков, при котором сложный процесс впервые достигает уровня “a”(a>0).
5. Найдено производящая функция числа скачков, при котором сложный процесс впервые достигает уровня нуль.
6. В полоске [c, d] построено интегральное уравнение функции распределения с запаздывающим аргументом для длительности времени пребывания процесса полумарковского блуждания.

Научная новизна исследования. Процесса полумарковского блуждания с отражающим экраном является основная научная новизна исследования.

Теоретическое и практическое ценность исследования: Результаты, полученные в диссертационном работе, носят и теоретический и практический характер. Эти результаты могут быть применены в науке, в экономике и военном деле

Апробация и применение: Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на семинарах отдела “Вероятностные методы управления” Института Информации и Управлении НАНА, на семинарах отдела “Функциональный анализ” ИММ НАНА. Основные результаты диссертационной работы докладывались на международной конференции ученых по теме “Актуальные проблемы математики и механики” посвященной 90-летию общенационального лидера Гейдара Алиева (Баку, 2013), на международной конференции ученых по теме “Современные проблемы математики и механики” посвященной 80-летному юбилею академика А.Дж.Гаджиева (Баку,2017) и на международной научной конференции «Информационные системы и технологии: достижения и перспективы» (Сумгаит, 2018).

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа НАНА Институт Математики и Механики.

Общий объем диссертации в знаках с указанием объема каждого структурного раздела в отдельности:

По теме диссертационной работы опубликованы 9 работ, список которых приводится в конце автореферата. Диссертационная работа состоит из введения-42000 знаков, трех глав: первая-32000 знаков, вторая-30000 знаков, третья-54000 знаков; заключения-2000 знаков, списка литературы. Основной текст изложен на 160000 знаков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом главе настоящей диссертации исследуется распределение скачкообразным процессом с отражающим экраном в нуле.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P(\cdot))$ задана последовательность $\left\{\xi_k^+, \eta_k^+, \xi_k^-, \eta_k^-\right\}_{k=1,\infty}$ случайных величин, где независимых между собою, одинаково распределенных, положительных случайных величин $\xi_k^+, \eta_k^+, \xi_k^-, \eta_k^-$. Если мы обозначим X (t) как составную сумму, мы должны принять следующие условия как требование задачи об отражающем экране. В качестве X (t) в частном случае можно взять количество товара на складе до момента t.

Обозначим

$S_{k-1}=\sum\eta_i^{\pm}$ показывает общее количество продукта, поступающего и уходящего на k-1 раз.

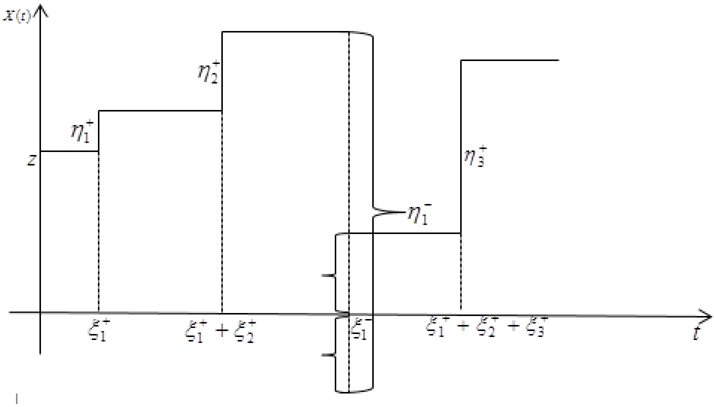
$$\tau_k^{\pm} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^{\pm}; k = 1,2,..\infty;\ \tau_0^{\pm} = 0,$$

$$S_0 = z,$$

где

$$v^{\pm}(t) = \min\left\{k : \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i^{\pm} > t\right\}$$ количество шагов до t

Процесс $X(t) = \left|S_{k-1} + \ldots + \eta^{+}_{\nu(\tau_{k-1})} - \eta^{-}_{\nu(\tau_k)}\right|$ если $\tau_{k-1}^{\pm} < t < \tau_k^{\pm}$ назовем сложным процессом полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле. Одна из реализаций процесса X(t) имеет вид:



$v^{\pm}(t)$ число положительных или отрицательных скачков за время t

Наша цель, найти явный вид преобразования Лапласа-Стильтьеса по фазе безусловного распределения процесса $X(t)$

Обозначим

$$R(t,x|z) = P\{X(t) < x | X(0) = z\},$$

$$\tilde{R}(\theta,x|z) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} R(t,x|z)dt, \theta > 0$$

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-\alpha x} d_x \tilde{R}(\theta,x|z), \ \alpha > 0 .$$

Составление интегрального уравнения для $\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha \mid z)$.

По формуле полной вероятности имеем

$$P\{X(t) < x | X(0) = z\} = P\{X(t) < x, \xi_1^- > t | X(0) = z\} +$$
$$+ P\{X(t) < x, \xi_1^- < t | X(0) = z\}$$

$$P\{X(t) < x | X(0) = z\} = P\{X^+(t) < x, \xi_1^- > t | X(0) = z\} +$$
$$+ \int_{s=0}^{t} \int_{y=0}^{\infty} P\{\xi_1^- \in ds, X(s) \in dy | X(0) = z\} P\{X(t-s) < x | X(0) = y\}$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид:

$$R(t,x|z)=P\{X^{+}(t)<x,\xi_1^{-}>t|X(0)=z\}+\int\limits_{s=0}^{t}\int\limits_{y=0}^{\infty}P\{\xi_1^{-}\in ds,X(s)\in dy|R(t-s,x|y)$$

.

Теорема 1. Преобразование Лапласа-Стильтеса распределения полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z)=e^{-\alpha z}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\xi_1^{-}>t\}dt$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{x=z}^{\infty}e^{-\alpha x}d_xP\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_1^{+}<x-z\right\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\nu^{+}(t)=k\}P\{\xi_1^{-}>t\}+$$

$$+\int\limits_{y=o}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|y)d_yP\{\eta_1^{-}<+y+z\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t_-}P\{\xi_1^{+}>t\}dP\{\xi_1^{-}<t\}-$$

$$-\int\limits_{y=o}^{z}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|y)d_yP\{\eta_1^{-}<-y+z\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t_-}P\{\nu^{+}(t)=k\}dP\{\xi_1^{-}<t\}+$$

$$+\int\limits_{y=o}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|y)\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma=0}^{\infty}d_yP\{\eta_1^{-}<z+\gamma+y\}d_yP\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^{+}<\gamma\right\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t_-}P\{\nu^{+}(t)=k\}dP\{\xi_1^{-}<t\}+$$

$$+\int\limits_{y=o}^{\infty}\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|y)\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma=\max(0,y=z)}^{\infty}d_yP\{\eta_1^{-}<z+\gamma-y\}\times$$

$$\times d_yP\left\{\sum_{i=1}^{k}\eta_i^{+}<\gamma\right\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\nu^{+}(t)=k\}dP\{\xi_1^{-}<t\}$$

Интегральное уравнение можно решить методом последовательных приближений, но полученное решение не годится для приложений. Это уравнение имеет решение в классе лапласовых распределений. Данное уравнение будем решать в следующем случае:

$$P\{\xi_1^{\pm} < t\} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda_{\pm} t}, & t > 0, \quad \lambda_{\pm} > 0, \end{cases}$$

$$P\{\nu^{+}(t) = k\} = \frac{(\lambda_{+} t)^k}{k!} e^{-\lambda_{+} t},$$

$$P\{\eta_1^{\pm} < t\} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\eta_{\pm} t}, & t > 0, \eta_{\pm} > 0, \end{cases}$$

$$d_{\gamma} P\left\{\sum_{i=1}^{k} \eta_i^{+} < \gamma\right\} = \frac{\mu_{+}^{k} \gamma^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu_{+}\gamma}$$

Хотя можно решить и в случае, когда случайные величины $\xi_1^{\pm}$, $\eta_1^{\pm}$ имеют эрлангское распределение высокого порядка.

В этом случае решается интегральное уравнение для преобразования Лапласа-Стильтеса распределения. Таким образом, интегральное уравнение преобразования Лапласа-Стилтьеса сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$\frac{d^2 \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z)}{dz^2} + \left(- \frac{(\lambda_{-} + \theta)\mu_{+}}{\lambda_{+} + \lambda_{-} + \theta} + \mu_{-} + \frac{\lambda_{-}\mu_{-}}{\lambda_{+} + \lambda_{-} + \theta} \right) \frac{d\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z)}{dz} -$$

$$- \frac{(2\lambda_{-} + \theta)\mu_{+}\mu_{-}}{\lambda_{+} + \lambda_{-} + \theta} \tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z) = \frac{(\alpha - \mu_{-})(\alpha + \mu_{+}) e^{-\alpha z}}{\lambda_{+} + \lambda_{-} + \theta}$$

И это решено

$$\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha | z) = C_1(\theta) e^{k_1} + C_2(\theta) e^{k_2} + C e^{-\alpha z}$$

где, С= $\dfrac{(\alpha - \mu_{-})(\alpha + \mu_{+})}{(\lambda_{+} + \lambda_{-} + \theta)(\alpha + k_1)(\alpha + k_2)}$

Глава II посвящена преобразованию Лапласа- Стильтеса совместного распределения момента первого пересечения некоторого уровня “a” (a>0) и перескоки через этот уровень сложным процессом полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле.

Цель этой главы нахождение явного вида преобразования Лапласа -Стильтеса совместного распределения.

В дополнение к предыдущим данным, здесь дополнительно приводится величины τ_a vә γ указывают соответственно момент прохождения уровня a и время, в течение которого он превышает этот уровень. Функция распределения процесса имеет следующий вид

$$K(t,\gamma \mid X(0)=z) = P\{\tau_a < t, \gamma > a \mid X(0)=z\}$$

Теорема 2. Получено интегральное уравнение преобразования Лапласа-Стилтьеса процесса.

$$\tilde{\tilde{K}}(\theta,\chi \mid z) =$$

$$-\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^- > t\} P\{\nu^+(t)=0\} dt \int_{\gamma=0}^{\infty} d_\gamma \varepsilon(a+\gamma-z) -$$

$$-\int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} P\{\xi_1^- > t\} \sum_{k=1}^{\infty} P\{\nu^+(t)=k\} \int_{\gamma=0}^{\infty} e^{-\chi\gamma} d_\gamma P\{\sum_{i=1}^{k} \zeta_1^+ < a+\gamma-z\} -$$

$$-\int\limits_{y=0}^{z}\tilde{\tilde{K}}(\theta,\gamma\,|\,y)d_yP\{\zeta_1^- < -y+z\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\nu^+(t)=0\}d_tP\{\xi_1^- < t\}-$$

$$-\int\limits_{y=o}^{z}\tilde{\tilde{K}}(\theta,\gamma\,|\,y)\int\limits_{h=0}^{a-z}d_yP\{\zeta_1^- < -y+h+z\}d_h\sum_{k=1}^{\infty}P\{\sum_{i=1}^{k}\zeta_i^+ < h\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\nu^+(t)=k\}\times$$

$$\times d_tP\{\xi_1^- < t\}-\int\limits_{y=z}^{a}\tilde{\tilde{K}}(\theta,\gamma\,|\,y)d_yP\{\zeta_1^- < -y+z\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\nu^+(t)=0\}d_tP\{\xi_1^- < t\}-$$

$$-\int\limits_{y=z}^{a}\tilde{\tilde{K}}(\theta,\gamma\,|\,y)\int\limits_{h=y-z}^{a-z}d_yP\{\zeta_1^- < -y+h+z\}d_h\sum_{k=1}^{\infty}P\{\sum_{i=1}^{k}\zeta_i^+ < h\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\nu^+(t)=k\}\times$$

$$\times d_tP\{\xi_1^- < t\}++\int\limits_{y=0}^{a}\tilde{\tilde{K}}(\theta,\gamma\,|\,y)d_yP\{\zeta_1^- < y+z\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\nu^+(t)=0\}d_tP\{\xi_1^- < t\}+$$

$$+\int\limits_{y=0}^{a}\tilde{\tilde{K}}(\theta,\gamma\,|\,y)\int\limits_{h=0}^{a-z}d_yP\{\zeta_1^- < y+h+z\}\times$$

$$\times d_h\sum_{k=1}^{\infty}P\{\sum_{i=1}^{k}\zeta_i^+ < h\}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-\theta t}P\{\nu^+(t)=k\}d_tP\{\xi_1^- < t\}$$

Решим интегрального уравнения частном случае когда

$$P\{\xi_1^{\pm} < t\}=\begin{cases}0, t<0\\ 1-e^{-\lambda_{\pm}t}, \lambda_{\pm}>0, t>0\end{cases}$$

$$\mathrm{P}\{\zeta_1^{\pm} < x\}=\begin{cases}0, x<0\\ 1-e^{-\mu_{\pm}x}, x>0, \mu_{\pm}>0\end{cases}$$

В результате получим неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{\tilde{K}}''(\theta,\chi,z)+(\mu_-+\frac{\mu_+\lambda_+}{\lambda_++\lambda_-+\theta})\tilde{\tilde{K}}'(\theta,\chi,z)+$$

$$+\left[\frac{\lambda_+\mu_+\mu_-}{\lambda_++\lambda_-+\theta}+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+\mu_-}{(\lambda_++\lambda_-+\theta)^2}\right]\tilde{\tilde{K}}(\theta,\chi,z)=$$

$$=\frac{(\mu_--\chi)(\mu_+(\lambda_-+\theta)+\chi(\lambda_++\lambda_-+\theta))}{(\lambda_++\lambda_-+\theta)^2}e^{(a-z)\chi}$$

Корни соответствующего характеристического уравнения следующие

$$k_{1;2}(\theta) = $$

$$= \frac{-(\mu_- + \dfrac{\mu_+\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta}) \pm \sqrt{(\mu_- + \dfrac{\mu_+\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta})^2 - 4\left[\dfrac{\lambda_+\mu_+\mu_-}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} + \dfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+\mu_-}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)^2}\right]}}{2}$$

и получили решение дифференциальное уравнение

$$\tilde{\tilde{K}}(\theta,\chi,z) = \frac{(\mu_- - \chi)((\mu_+(\lambda_- + \theta) + \chi(\lambda_+ + \lambda_- + \theta))}{(\lambda_+ + \lambda_- + \theta)^2(\chi + k_1(\theta))(\chi + k_2(\theta))} e^{\chi(a-z)} +$$

$$+C_1(\theta)e^{k_1(\theta)z} + C_2(\theta)e^{k_2(\theta)z}$$

где $C_1(\theta)$ и $C_2(\theta)$ постоянны относительно z .

Глава III посвящена исследованию производящей функции числа скачков, при котором сложный процесс полумарковского блуждания впервые достигает уровня “a” (a>0).

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ задана последовательность независимых между собою одинаково распределенных положительных случайных величин ξ_k^+ , η_k^+ , ξ_k^- , η_k^- , $k = \overline{1,\infty}$

Вводим следующие обозначения

$\nu^{\pm}(t) = \min\left\{k : \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i^{\pm} > t\right\}$ - числа положительных скачков процесса $X^{\pm}(t)$ за время t

$$X^{\pm}(t) = \sum_{i=1}^{\nu^{\pm}(t)} \eta_i^{\pm}$$

$$X(t) = X^+(t) - X^-(t)$$

Процесс $X(t) = X^+(t) - X^-(t)$ назовем сложным процессом полумарковского блуждания.

Через ν_1^a обозначим число скачков процесса $X(t)$ при котором он впервые достигает уровня "a" $(a > 0)$

Обозначим

$$\Psi(u \mid z) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k \mathrm{P}\left\{\nu_1^a = k \mid X(0) = z\right\}, \ |u| \le 1.$$

Теорема 3. $\Psi(u \mid z)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$\Psi(u \mid z) = u\mathrm{P}\left\{\eta_1^+ > a - z\right\} + u\int_{y=z}^{a} \Psi(u \mid y) dy \mathrm{P}\left\{\eta_1^+ < y - z\right\} \mathrm{P}\left\{\xi_1^+ < \xi_1^-\right\} +$$

$$+ u\int_{y=z}^{a} \Psi(u \mid y) \int_{x=y}^{\infty} dy \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{P}\left\{\eta_1^- + \ldots + \eta_m^- < x - y\right\} \times$$

$$\times \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{P}\left\{\nu^-(t) = m\right\} d_t \mathrm{P}\left\{\xi_1^+ - \xi_1^- < t\right\} d_y \mathrm{P}\left\{\eta_1^+ < y\right\} +$$

$$+ u\int_{y=-\infty}^{z} \Psi(u \mid y) \int_{x=z}^{\infty} dy \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{P}\left\{\eta_1^- + \ldots + \eta_m^- < x - y\right\} \times$$

$$\times \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{P}\left\{\nu^-(t) = m\right\} d_t \mathrm{P}\left\{\xi_1^+ - \xi_1^- < t\right\} d_y \mathrm{P}\left\{\eta_1^+ < y\right\}$$

Уравнение относительно $\Psi(u \mid z)$ будем решать, если случайные величины ξ_k^+ , $\eta_k^+, \xi_k^-, \eta_k^-$ имеют экспоненциальное распределение с параметрами $\lambda_+ > 0, \lambda_- > 0,$, $\mu_+ > 0, \mu_- > 0$. Соответственно

$$P\{\xi_1^{\pm} < t\} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda_{\pm} t} \end{cases} \quad t > 0, \ \lambda_+ > 0, \quad \lambda_- > 0$$

$$P\{\eta_1^{\pm} < x\} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\mu_{\pm} t} \end{cases} \quad x > 0, \mu_+ > 0, \mu_- > 0$$

$$\mathrm{P}\left\{\xi_1^+ < \xi_1^-\right\} = \frac{\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-},$$

$$\mathrm{P}\{\xi_1^- < \xi_1^+\} = \frac{\lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-},$$

$$d_t \mathrm{P}\{\xi_1^+ - \xi_1^- < t\} = \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} e^{-\lambda_+ t} dt,$$

$$P\{\nu^{\pm}(t) = m\} = \frac{(\lambda_{\pm} t)^m}{m!} e^{-\lambda_{\pm} t}$$

$$d_y P\{\eta_1^- + \eta_2^- + \ldots + \eta_m^- < y\} = \mu_- \frac{(\mu_- y)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\mu_- y} dy$$

Получим, однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\Psi''(u \mid z) + [-\mu_+ + \frac{\lambda_+ \mu_-}{\lambda_+ + \lambda_-} + \frac{\lambda_+ \mu_+}{\lambda_+ + \lambda_-} u]\Psi'(u \mid z) + [-\frac{\lambda_+ \mu_+ \mu_-}{\lambda_+ + \lambda_-} +$$

$$\frac{\lambda_+^2 \mu_+ \mu_-}{(\lambda_+ + \lambda_-)^2} u + \frac{\lambda_+ \lambda_-^2 \mu_+ \mu_-}{(\lambda_+ + \lambda_-)^3} u]\Psi(u \mid z) = 0$$

Решим это уравнение.

Характеристическое уравнение и корни

$$K^2(u) + [-\mu_+ + \frac{\lambda_+ \mu_-}{\lambda_+ + \lambda_-} + \frac{\lambda_+ \mu_+}{\lambda_+ + \lambda_-} u]K(u) + \left[-\frac{\lambda_+ \mu_+ \mu_-}{\lambda_+ + \lambda_-} +\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_+^2 \mu_+ \mu_-}{(\lambda_+ + \lambda_-)^2} u + \frac{\lambda_+ \lambda_-^2 \mu_+ \mu_-}{(\lambda_+ + \lambda_-)^3} u \right] = 0$$

Получим решение дифференциального уравнения

$$\Psi(u \mid z) = \frac{(\lambda_+ + \lambda_-)(k_1(u) - \mu_+) e^{k_1(u) z}}{\lambda_+ \mu_+ e^{k_1(u) a} - \frac{\lambda_-^2 \mu_- (\lambda_- \mu_+ + \lambda_+ \mu_-)(k_1(u) + \mu_+)}{[k_1(u)(\lambda_+ + \lambda_-) + \lambda_+ \mu_-](\mu_+ (\lambda_+ + \lambda_-) + \lambda_+ \mu_-)} e^{\mu_+ a}}$$

В этой главе также рассматривается функция количества шагов, сделанных до того, как полумарковский процесс, который отражает ноль, достигнет нуля.

Через v_0 обозначим число скачков процесса $X(t)$ при котором он впервые пересекает уровень нуль.

Обозначим

$$\Psi_0(u \mid z) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k P\{v_0 = k \mid X \mid (0) = z\}.$$

$\Psi_0(u \mid z)$ -производящую функцию числа скачков сложного процесса, при котором он впервые достигает уровня нуль

Теорема 4. Производящей функции числа скачков процесса $X(t)$, при котором он впервые достигает уровня нуля удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\Psi_0(u \mid z) = u \int_{h=0}^{\infty} P\{\eta_1^- > z + h\} d_h \int_{t=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^+ < h\right\} P\{v^+(t) = m\} d_t P(\xi_1^- < t) -$$

$$- u \int_{y=0}^{z} \Psi_0(u \mid y) d_y \int_{h=0}^{\infty} P\{\eta_1^- < z + h - y\} d_h \int_{t=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^+ < h\right\} P\{v^+(t) = m\} d_t P(\xi_1^- < t) -$$

$$- u \int_{y=0}^{z} \Psi_0(u \mid y) d_y \int_{h=y-z}^{\infty} P\{\eta_1^- < z + h - y\} d_h \int_{t=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{m} \eta_i^+ < h\right\} P\{v^+(t) = m\} d_t P(\xi_1^- < t).$$

Пусть

$$P\{\xi_1^{\pm} < t\} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\mu_{\pm} t}, & t > 0, \lambda_{\pm} > 0, \end{cases}$$

$$P\{\eta_1^{\pm} < t\} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\mu_{\pm} t}, & t > 0, \mu_{\pm} > 0. \end{cases}$$

$$\Psi''(u \mid z) + \left(\frac{\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} - \mu_+ + \mu_- \right) \Psi'(u \mid z) +$$

$$+ \left(\frac{\lambda_+ \mu_+ \mu_-}{\lambda_+ + \lambda_-} - \mu_+ + \mu_- - \frac{\lambda_+ \mu_+ u}{(\lambda_+ + \lambda_-)^2} \right) \Psi(u \mid z) = 0$$

$C_1(u) =$

$$
=\frac{\dfrac{\lambda_- u}{\lambda_+\lambda_-}+\dfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+ u}{(\lambda_+ +\lambda_-)^2(\mu_+ +\mu_-)+\lambda_+\mu_+(\lambda_+ +\lambda_-)}}{1-\dfrac{\lambda_+\mu_- u}{(\lambda_+ +\lambda_-)[\mu_- k_1(u)]}-\dfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+ u}{(\lambda_+ +\lambda_-)(\mu_+ +\mu_-)-\lambda_+\mu_+}\dfrac{1}{\lambda_-\mu_+ -(\lambda_+ +\lambda_-)k_1(u)}}.
$$

Наконец-то, получим, что

$$
\Psi_0(u\,|\,z)=C_1(u)e^{k_1(u)z}.
$$

Полученный результат есть производящая функция распределения периода занятости в системе массового обслуживания с одним прибором, пуассоновским поступающим потоком, экспоненциальным распределением обслуживания и ожиданием.

Находилась математического ожидания и дисперсии для числа скачков сложного процесса полумарковского блуждания, при котором процесс впервые достигает уровня нуль.

$$
K^2(u)+[\frac{\lambda_+\lambda_-}{\lambda_+ +\lambda_-}-\mu_+ +\mu_-]K(u)+
$$

$$
+\left[\frac{\lambda_+\mu_+\mu_-}{\lambda_+ +\lambda_-}-\mu_+ +\mu_- -\frac{\lambda_+\mu_+ u}{(\lambda_+ +\lambda_-)^2}\right]=0.
$$

Тогда корни характеристического уравнения представим в таком виде

$$
K(u)=\frac{\left(\dfrac{\lambda_+\lambda_-}{\lambda_+\lambda_-}-\mu_+ +\mu_-\right)}{2}\pm
$$

$$
\pm\frac{\left(\dfrac{\lambda_+\lambda_-}{\lambda_+\lambda_-}-\mu_+ +\mu_-\right)^2-4\left(\dfrac{\lambda_+\lambda_-}{\lambda_+\lambda_-}-\mu_+ +\mu_- -\dfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+ u}{(\lambda_+ +\lambda_-)^2}\right)}{2}
$$

Обозначим

$$
A=-\left(\frac{\lambda_+\lambda_-}{\lambda_+\lambda_-}-\mu_+ +\mu_-\right)
$$

$$B=-\left(\frac{\lambda_+\lambda_-}{\lambda_+\lambda_-}-\mu_+ +\mu_-\right)^2-4\left(\frac{\lambda_+\lambda_-}{\lambda_+\lambda_-}-\mu_+\mu_-\right)$$

$$D=4\left(\frac{\lambda_+\lambda_-}{(\lambda_+\lambda_-)^2}\right)$$

Тогда корни характеристического уравнения будут следующего вида

$$K(u)=A\pm\frac{\sqrt{B+Du}}{2}\qquad K(1)=A\pm\frac{\sqrt{B+Du}}{2}$$

$$K'(u)=\pm\frac{D}{4\sqrt{B+Du}}\qquad K'(1)=\pm\frac{D}{4\sqrt{B+D}}$$

$$\Psi_0(u\,|\,z)=C_1(u)e^{k_1(u)z}$$

Дифференцируя по u, получим

$$\Psi_0'(u\,|\,z)=\left(C_1'(u)+C_1(u)K_1'(u)z\right)e^{k_1(u)z}$$

Здесь

$$C_1(u)=$$

$$\frac{\dfrac{\lambda_- u}{\lambda_+ +\lambda_-}+\dfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+ u}{(\lambda_+ +\lambda_-)^2(\mu_+ +\mu_-)-\lambda_+\mu_+(\lambda_+ +\lambda_-)}}{1-\dfrac{\lambda_-\mu_- u}{(\lambda_+ +\lambda_-)\left[\mu_- -k_1(u)\right]}-\dfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+ u}{(\lambda_+ +\lambda_-)(\mu_+ +\mu_-)-\lambda_+\mu_+}\dfrac{1}{\mu_+(\lambda_+ +\lambda_-)-\lambda_+\mu_+ -(\lambda_+ +\lambda_-)k_1(u)}}$$

$$C_1(u)=$$

$$\frac{\dfrac{\lambda_-}{\lambda_+ +\lambda_-}+\dfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_+ +\lambda_-)^2(\mu_+ +\mu_-)-\lambda_+\mu_+(\lambda_+ +\lambda_-)}}{\dfrac{1}{u}-\dfrac{\lambda_-\mu_-}{(\lambda_+ +\lambda_-)\left[\mu_- -k_1(u)\right]}-\dfrac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_+ +\lambda_-)(\mu_+ +\mu_-)-\lambda_+\mu_+}\dfrac{1}{\mu_+(\lambda_+ +\lambda_-)-\lambda_+\mu_+ -(\lambda_+ +\lambda_-)k_1(u)}}$$

Обозначим

$$\Phi=\frac{\lambda_-}{\lambda_+ +\lambda_-}+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_+ +\lambda_-)^2(\mu_+ +\mu_-)-\lambda_+\mu_+(\lambda_+ +\lambda_-)}$$

$$H=\frac{\lambda_-\mu_-}{\lambda_+ +\lambda_-}$$

$$E=\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_+ +\lambda_-)((\lambda_+ +\lambda_-)(\mu_+ +\mu_-)-\lambda_+\mu_+)}$$

$$Y=\frac{\mu_+(\lambda_+ +\lambda_-)-\lambda_+\mu_+}{\lambda_+ +\lambda_-}$$

Тогда

$$C_1(u)=\frac{\Phi}{\frac{1}{u}-\frac{H}{[\mu_- -K_1(u)]}-\frac{E}{У-K_1(u)}}$$

Дифференцируем по u, получим

$$C_1^{'}(u)=$$

$$=\frac{\Phi}{\left(\frac{1}{u}-\frac{H}{[\mu_- -K_1(u)]}-\frac{E}{У-K_1(u)}\right)^2}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{H}{[\mu_- -K_1(u)]^2}K_1'(u)+\frac{E}{[У-K_1(u)]^2}K_1'(u)\right)$$

$$C_1(u)=\frac{\Phi}{\frac{1}{u}-\frac{H}{[\mu_- -K_1(u)]}-\frac{E}{У-K_1(u)}}$$

для $u=1$

$$C_1(1)=\frac{\Phi}{1-\frac{H}{[\mu_- -K_1(1)]}-\frac{E}{У-K_1(1)}}$$

$$C_1'(u)=\frac{\Phi}{\left(\frac{1}{u}-\frac{H}{[\mu_- -K_1(u)]}-\frac{E}{У-K_1(u)}\right)^2}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{H}{[\mu_- -K_1(u)]^2}K_1'(u)+\frac{E}{[У-K_1(u)]^2}K_1'(u)\right)$$

для $u=1$

$$C_1'(1)=\frac{\Phi}{\left(1-\frac{H}{[\mu_- -K_1(1)]}-\frac{E}{У-K_1(1)}\right)^2}\left(1+\frac{H}{[\mu_- -K_1(1)]^2}K_1'(1)+\frac{E}{[У-K_1(1)]^2}K_1'(1)\right)$$

В итоге получим математическое ожидание числа скачков, при котором сложный процесс полумарковского блуждания впервые достигает уровня нуль.

$$M(\nu_1^0)=\Psi_0'(1\,|\,z)=\left(C_1'(1)+C_1(1)K_1'(1)z\right)e^{K_1(1)z}=$$

$$\left(\frac{\Phi}{\left(1-\frac{H}{[\mu_- -K_1(1)]}-\frac{E}{У-K_1(1)}\right)^2}\left(1+\frac{H}{[\mu_- -K_1(1)]^2}K_1'(1)+\frac{E}{[У-K_1(1)]^2}K_1'(1)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Phi}{1-\frac{H}{[\mu_- -K_1(1)]}-\frac{E}{У-K_1(1)}}K_1'(1)z\right)e^{k_1(1)z}$$

Можем найти дисперсию

$$D(\nu_1^0)=\Psi_0''(1\,|\,z)+\Psi'(1\,|\,z)-(\Psi'(1\,|\,z))^2$$

здесь

$$\Psi_0''(1\,|\,z)=\{\left(C_1'(1)+C_1(1)K_1'(1)z\right)'+K_1{}'(1)z\left(C_1'(1)+C_1(1)K_1'(1)z\right)\}e^{k_1(1)z}$$

И получим дисперсию.

$$D(\nu_1^0)=[\left(C_1'(1)+C_1(1)K_1'(1)z\right)'+K_1{}'(1)z\left(C_1'(1)+C_1(1)K_1'(1)z\right)]e^{K_1(1)z}+$$
$$+\left(C_1'(1)+C_1(1)K_1'(1)z\right)e^{K_1(1)z}-[\left(C_1'(1)+C_1(1)K_1'(1)z\right)e^{K_1(1)z}]^2$$

В этом главе еще исследуется интегральное уравнение с запаздывающим аргументом в процессах полумарковского блуждания

В данной работе найдено преобразование Лапласа распределения длительности времени пребывания разностного процесса полумарковского блуждания.

Описание процесса

Пусть на вероятностном пространстве заданы две независимые одинокого распределенные случайные величины последовательности $\left\{\xi_k^+,\eta_k^+\right\}_{k=1,\infty}$ и $\left\{\xi_k^-,\eta_k^-\right\}_{k=1,\infty}$, пары в каждой последовательности независимы и $\xi_k^\pm>0,\ \eta_k^\pm>0$. По этим случайным величинам построим следующие процессы полумарковского блуждания

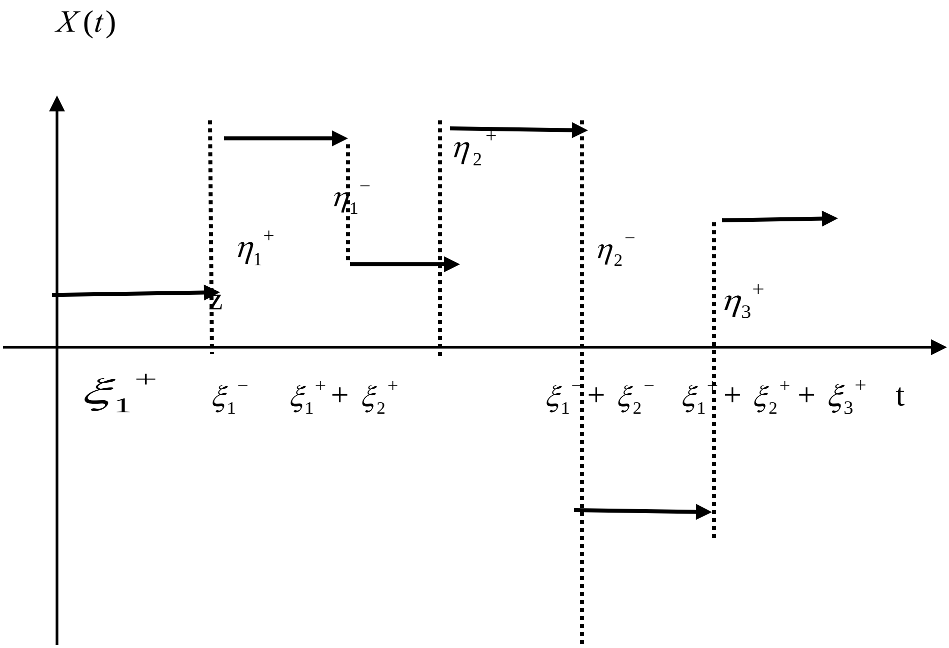
$$\mathrm{X}^{+}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^{+}, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{+}\le t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{+},$$

$$\mathrm{X}^{-}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^{-}, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{-}\le t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{-} \quad .$$

Процесс

$$\mathrm{X}(t)=\mathrm{X}^{+}(t)-\mathrm{X}^{-}(t)$$

назовём разностным процессом полумарковского блуждания. Одна из его реализаций будет следующая



Цель найти преобразование Лапласа распределения длительности времени пребывания процесса X(t)

Предполагаем, что случайная величина ξ_1^{+} распределена по экспоненциальному закону. Тогда $\mathrm{X}(t)$ становится сложным разностным Марковским процессом

Пусть процесс X(t) функционирует в полосе [c, d], c>0, d>0.

Обозначим

$$\mathrm{A}_z = \left\{ \inf_{0\le s\le t} X(s) > c; \sup_{0\le s\le t} X(s) < d \mid X(0) = z \right\}, \quad z > 0,$$

и

$$\mathrm{K}(t; c, d \mid X(0) = z) = \mathrm{P}\left\{ \inf_{0\le s\le t} X(s) > c; \sup_{0\le s\le t} X(s) < d \mid X(0) = z \right\}. \qquad (0.13)$$

Обе части этого равенства умножим на $e^{-\theta t}, \theta > 0, t > 0$ и проинтегрируем по t

$$\widetilde{\mathrm{K}}(\theta; c, d \mid X(0) = z) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} \mathrm{P}\left\{ \inf_{0\le s\le t} X(s) > c; \sup_{0\le s\le t} X(s) < d \mid X(0) = z \right\} dt \cdot$$

Теорема 5. Интегральное уравнение для преобразования Лапласа распределения длительности времени пребывания разностного процесса полумарковского блуждания будет следующим.

$$\widetilde{K}(\theta / z) = \frac{1}{\lambda_+ + \lambda_- + \theta} - \frac{\lambda_+\lambda_-\mu_-}{(\lambda_+ + \theta)\theta} e^{-\mu_- d} \int_{y=c}^{d} \widetilde{K}(\theta \mid y) e^{\mu_- y} dy$$

$$+ \frac{\lambda_+\lambda_-\mu_-}{(\lambda_+ + \theta)(\lambda_- + \theta)} e^{-\frac{\lambda_+\mu_+ + (\mu_+ + \mu_-)\theta}{\lambda_- + \theta} d} e^{\frac{\mu_+\theta}{\lambda_+ + \theta} z} \int_{y=c}^{d} \widetilde{K}(\theta \mid y) e^{\mu_- y} dy$$

$$+ \frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+\mu_-}{(\lambda_+ + \theta)(\lambda_- + \theta)} e^{\frac{\mu_+\theta}{\lambda_+ + \theta} z} \int_{y=z}^{d} \widetilde{K}(\theta \mid y) e^{-\frac{\mu_+\theta}{\lambda_+ + \theta} y} \int_{x=0}^{d-y} e^{-\frac{[(\lambda_+ + \theta)\mu_- + \mu_+\theta]}{\lambda_+ + \theta} x} dx dy$$

$$- \frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+\mu_-}{(\lambda_+ + \theta)(\lambda_- + \theta)} e^{\frac{\mu_+\theta}{\lambda_+ + \theta} z} \int_{y=c}^{z} \widetilde{K}(\theta \mid y) e^{-\frac{\mu_+\theta}{\lambda_+ + \theta} y} \int_{x=z-y}^{d-y} e^{-\frac{[(\lambda_+ + \theta)\mu_- + \mu_+\theta]}{\lambda_+ + \theta} x} dx dy$$

$$- \frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_- + \theta)\theta} e^{\mu_+ b} \int_{y=c}^{d} \widetilde{K}(\theta \mid y) e^{-\mu_+ y} dy$$

$$+ \frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_+ + \theta)(\lambda_- + \theta)} e^{\frac{\lambda_-\mu_+ + (\mu_+ + \mu_-)\theta}{\lambda_- + \theta} b} e^{\frac{\mu_-\theta}{\lambda_- + \theta} z} \int_{y=c}^{d} \widetilde{K}(\theta \mid y) e^{-\mu_+ y} dy$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_++\theta)(\lambda_-+\theta)}e^{\frac{\mu_-\theta}{\lambda_-+\theta}z}\int\limits_{y=c}^{z}\tilde{K}(\theta\,|\,y)e^{-\frac{\mu_-\theta}{\lambda_-+\theta}y}\int\limits_{x=0}^{y-z}e^{-\frac{[(\lambda_-+\theta)\mu_++\mu_-\theta]}{\lambda_-+\theta}x}dxdy$$

$$+\frac{\lambda_+\lambda_-\mu_+}{(\lambda_++\theta)(\lambda_-+\theta)}e^{\frac{\mu_-\theta}{\lambda_-+\theta}z}\int\limits_{y=c}^{d}\tilde{K}(\theta\,|\,y)e^{-\frac{\mu_-\theta}{\lambda_-+\theta}y}\int\limits_{x=y-z}^{y-c}e^{-\frac{[(\lambda_-+\theta)\mu_++\mu_-\theta]}{\lambda_-+\theta}x}dxdy$$

$$+\frac{\lambda_+\mu_+}{\lambda_++\lambda_-+\theta}e^{-\mu_+z}\int\limits_{y=z}^{d}\tilde{K}(\lambda_-+\theta\,|\,y)e^{-\mu_+y}dy+$$

$$+\frac{\lambda_-\mu_-}{\lambda_++\lambda_-+\theta}e^{-\mu_-z}\int\limits_{y=c}^{z}\tilde{K}(\lambda_++\theta\,|\,y)e^{\mu_-y}dy$$

Автор выражает глубокую благодарность за постановку задачи и постоянное внимание к работе профессора Т.Г.Насирова.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих научных статьях:

1. Э.М.Нейманов, Е.А.Ибаев. Преобразования Лапласа-Стильтеса распределения процесса полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле. // Актуальные проблемы математики и информатики тезисы международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева, май 29-31, – 2013, – Баку, – с. 183-185
2. Э.М.Нейманов, Т.И.Насирова, Е.А.Ибаев. Преобразования Лапласа-Стильтеса распределения процесса полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле. // Проблемы управления и информатики Выпуск 1. Украина, – 2015, – с. 97-104. http://jais.org.ua/zhurnal-1.html
3. E.M.Neymanov, C.Yapar, E.A.Ibayev Производящая функция числа скачков при которомсложный процесс полумарковского блуждания впервые достигает уровня нуль. // Transactions of Azerbaijan National Academy of Sciences Informatics and Control Problems – Baku, vol. XXXV, No 6, – 2015, – pp. 42-49. http://www.icp.az/2015/6-04.pdf
4. E.M.Neymanov. Explicit Form of Laplace-Stieltjes Transform of Joint Distribution of the First PassageTime of Some Level “a”(a>0) and Overshoots Across this Level by a Complex Semi-Markov Walk Process with Reflecting Screen at Zero. // Caspian Journal of applied mathematics, ecology and economics, – Baku, vol. 4, No 1, – 2016, – pp.89-100. http://cjamee.org/wp-content/uploads/2018/09/10.pdf
5. Э.М.Нейманов, Т.И. Насирова, У.Я. Керимова . Интегральное Уравнение с запаздывающим аргументом в процессах полумарковского блуждания. // Journal of Contemporary Applied Mathematics, vol. 7, No 1, – 2017, June, – pp. 9-13 http://journalcam.com/wp-content/uploads/2017/12/2.pdf
6. E.M.Neymanov, T.I. Nasirova, U.Y. Kerimova.Generating Function of the Number of Jamps at which Complex Process of Semi-Markov Walk Achieves First the Level "a". // Caspian Journal of applied mathematics, ecology and economics. – Baku, No 1, – 2017, – pp. 47-55. http://ieeacademy.org/?mdocs-file=1426

7. E.M.Neymanov, Nasirova T.I, Omarova K.K. A description of the model of a process of the semi-Markovian walk with a delaying screen by means of a fractional order differential equation. // Modern problems of mathematics and mechanics. PROCEEDING of the International conference devoted to the 80-th anniversary of academician Akif Gadjiev, december 6-8 2017, – Baku, – pp.161
8. Э.М.Нейманов, Т.И. Насирова. Составление уравнения для эрланговского распределения второго порядка в сложном процессе полумарковского блуждания с отражающим экраном в нуле. // "İnformasiya sistemləri və texnologiyalar: nailiyyətlər və perspektivlər" mövzusunda beynəlxalq elmi konfrans, noyabr 15-16, – 2018, – Sumqayıt, – pp. 299.
9. Э.М.Нейманов. Об средном значении числа скачков полумарковского блуждания, при котором процесс впервые достигает уровня нуль // Azərbaycan Mühəndislik Akademiyasının Xəbərləri, – 2019, Volume 3, Number 2; – səh. 79-83

Защита диссертации состоится 21 I 2022 года в 14:00 на заседании Диссертационного совета ED 1.19 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующего на базе Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Адрес: AZ1141, Баку, ул. Бахтияра Вахабзаде 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам 21 XII 2021 года

Подписано в печать: 20.12.2021

Формат бумаги: А5

Объем: 12469

Тираж: 20