АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ДИРАКА $2m-го$ ПОРЯДКА

Специальность: 1211.01 – Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Гюнель Разим кызы Гаджиева**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии

Баку – 2022

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Вали Магеррам оглы Курбанов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

Назим Бахыш оглы Керимов

доктор математических наук, доцент

Тельман Бенсер оглы Касумов

кандидат физико-математических наук, доцент

Ширмаил Гасан оглы Багиров

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор

_______________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.

_______________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

академик, д.ф.–м.н., профессор

_______________ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки.

Спектральная теория дифференциальных операторов (Шредингера, Дирака и др.) особенно развивалась в последние десятилетия в связи с развитием квантовой механики.

К основным вопросам спектральной теории относятся исследование спектра; вопросы о базисности систем корневых функций изучаемого оператора в том или ином пространстве функций; вопросы о равносходимости спектрального разложения произвольной функции из того или иного класса по системе корневых функций изучаемого оператора с разложением той же функции в тригонометрический ряд Фурье; вопросы об абсолютной и равномерной сходимости спектрального разложения функции из класса, вообще говоря, не совпадающего с областью определения данного оператора; решение обратных задач спектрального анализа и т.д.

Исследование по спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов берут свое начало еще с классических работ Ж.Лиувилля, Ш.Штурма, а также более поздних работ В.А.Стеклова, Я.Д.Тамаркина, Д.Биркгофа, М.Л.Расулова и других авторов, в которых изучались вопросы асимптотики собственных значений и сходимости спектральных разложений для различных классов краевых задач.

Длительное время основным объектом исследования были спектральные свойства самосопряженных дифференциальных операторов. Однако в последние десятилетия возник целый ряд новых задач математической физики, приводящих к изучению спектральных свойств несамосопряженных дифференциальных операторов. Примером задач такого ряда может служить задача Бицадзе-Самарского с нелокальными краевыми условиями для уравнения теплопроводности.

При изучении несамосопряженных задач было замечено, что система собственных функций несамосопряженного оператора, вообще говоря, не только не образует базис в классе

L_2, но не является полный в L_2. Поэтому эта система должна быть пополнена присоединенными функциями. В этих задачах собственные и присоединенные функции (корневые функции), вообще говоря, не ортогональны в L_2, и ни их замкнутость, ни их минимальность не влечет за собой их базисности в этом пространстве. Таким образом, переход к несамосопряженным задачам потребовал новые подходы для их изучения.

В известных работах М.В.Келдыша был установлен факт полноты в L_2 специально построенной системы корневых функций (названной М.В.Келдышем канонической системой) для широкого класса краевых задач. В дальнейшем вопрос о полноте изучен для широкого класса краевых задач в работах В.Б.Лидского, М.А.Наймарка, В.Н.Визитея и А.С.Маркуса, А.С.Маркуса, Дж.Э.Аллахвердиева, М.Г.Гасымова и М.Г.Джавадов, А.М.Крола, А.А.Шкаликова и других авторов.

В работах и В.П. Михайлову и Г.М.Кесельману удалось выделить класс усиленно регулярных краевых задач, обеспечивающих базисность Рисса систем корневых функций в L_2. Блок-базисность (или базисность со скобками) систем корневых функций дифференциального оператора n-го порядка с регулярными краевыми условиями установлена в работе А.А.Шкаликова.

Во всех перечисленных выше работах (кроме работы А.А.Шкаликов) рассматривались операторы, у которых система корневых функций, содержит конечное число присоединенных функций.

В работе Н.И.Ионкинабыла исследована краевая задача (с регулярными условиями) для оператора второго порядка с нулевыми коэффициентами. Все собственные значения этой задачи двукратны, а общее число присоединенных функции бесконечно. Тем не менее, оказалось, что корневые функции этой задачи (при специальном их выборе) образуют базис Рисса в L_2.

Первый наиболее обший результат о равносходимости для обыкновенных дифференциальных операторов с условиями регулярности краевых условий и достаточной гладкости коэффициентов получил Я.Д.Тамаркин. Значительно позже М.Стоун получил аналогичный результат для оператора с суммируемыми коэффициентами. В работе А.П.Хромов распространил теорему равносходимости Тамаркина на интегральные операторы, ядра которых обобщают свойства функции Грина дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями. Отметим также работы В.С.Рыхлова, где изучена скорость равносходимости для дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями.

В основе перечисленных работ лежал резольвентный метод и полученные в этих работах равносходимости являются блок-равносходимостями.

В последние время успешно применяется разработанный В.А.Ильиным, метод изучения дифференциальных операторов. Им было замечено, что при наличии бесконечного числа кратных собственных значений свойства базисности и равносходимости в отличие от свойства полноты1)существенно зависит от выбора корневых функций; 2) не определяется только конкретным видом краевых условий, на эти свойства влияют также значения коэффициентов дифференциального оператора, причем эти свойства изменяются при каком угодно малом изменении значений коэффициентов в метрике тех классов, в которых заданы эти коэффициенты. Таким образом, в этой ситуации нельзя сформулировать условия базисности и равносходимости в терминах краевых условий.

В связи с этим В.А.Ильин предложил новую трактовку корневых функций, которые понимаются как регулярные решения соответствующего уравнения со спектральным параметром безотносительно к виду краевых условий. Такая трактовка позволяет рассматривать произвольные краевые условия (как локальные, так и нелокальные), системы функций, не связанные какими-либо краевыми условиями, а также некоторые системы, полученные объединением подмножеств корневых функций двух различных краевых задач.

В работах В.А.Ильин рассматривалась система корневых функций обыкновенного дифференциального оператора и при определенных естественных условиях установлены теоремы о равносходимости и базисности на компакте (а также покомпонентной равносходимости).

В дальнейшем, изучение этих и других вопросов спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов развивались в работах В.А.Ильина, и его последователей В.В.Тихомирова, И.С.Ломова, Н.Б.Керимова, В.Д.Будаева, И.Йо, В.И.Коморника, Н.Лажетича, Л.В.Крицкова, В.М.Курбанова и других.

Отметим, что методом В.А.Ильина вопросы безусловной базисности систем корневых функций оператора Дирака исследованы в работе В.М.Курбанова. Им установлены критерии бесселевости и безусловной базисности в L_2 систем корневых вектор функций оператора Дирака. В работе М.Хорвата доказана теорема о покомпонентной равномерной равносходимости в случае, когда система состоит только из собственных функций оператора Дирака и образует в L_2 базис Рисса. К вопросам покомпонентной равномерной равносходимости на компакте, равномерной сходимости, риссевости систем корневых вектор-функций оператора Дирака посвящены работы В.М.Курбанова и А.И.Исмайлова, Л.З.Буксаева, Гю.Р.Гаджиева.

Вопросы базисности систем корневых вектор-функций оператора Дирака с конкретными краевыми условиями изучались в работах П.Джакова и Б.Митягина, И.Трошина и М.Ямомоты, Л.Л.Оридороги и С.Хасси.

В работе И.Трошина и М.Ямомоты установлена базисность Рисса в случае когда потенциал оператора Дирака принадлежит в L_2 и краевые условия разделенные. А в работе П.Джакова и Б.Митягина исследован случай с регулярными краевыми условиями и с потенциалом из класса L_2. В нем доказана базисность Рисса из подпространств, а в случае сильно регулярных краевых условий базисность Рисса. Оператор Дирака с потенциалом из $L_p,\ p \geq 1$, исследован в работах А.М. Савчука и А.А. Шкаликова, А.М. Савчука и И.В. Садовничей и для случая сильно регулярных краевых условий была доказана базисность Рисса, а в случае регулярных (но не сильно регулярных) краевых условий базисность Рисса из подпространств. В работахА.А.Лунева и М.М.Маламуда исследована 2×2 система типа Дирака с потенциалами из класса L_1 и сильно регулярным краевыми условиями и установлена базисность Рисса. Для $2m \times 2m$ системы Дирака с краевыми условиями Дирихле и потенциалом из L_2 базисность Рисса из подпространств доказана в работе Я. В. Мукутнук, и Д.В.Руюда.

Таким образом, представляет интерес дальнейшее исследование методом В.А.Ильина дифференциальных операторов и в том числе операторов типа Дирака.

Объект и предмет исследования. Основным объектом диссертационной работы является исследование вопросов базисности и равносходимости разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака $2m$ -го порядка.

Цель и задачи исследования. Исследовать вопросы бесселевости, безусловной базисности систем корневых вектор-функций операторов типа Дирака $2m$-го порядка в пространстве L_2 и проблему покомпонентной равномерной равносходимости на компакте ортогонального разложения по собственным вектор-функциям данного оператора с тригонометрическим разложением.

Методы исследования. В работе применяются методы спектральной теории дифференциальных операторов, функционального анализа и теории гармонического анализа.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Результаты исследования вопросов о бесселевости систем корневыхвектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$.

- Результаты исследования вопросов о безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$.
- Результаты исследования вопросов об эквивалентной базисностисистем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$.
- Результаты исследования вопросов о покомпонентной равномерной равносходимости на компакта с тригонометрическим рядом разложений вектор-функций из класса $L_2^{2m}(0,2\pi)$ в ортогональный ряд по собственным вектор-функциям оператора типа Дирака $2m$ -го порядка.
- Результаты исследования вопросов о бесселевости и безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака в пространстве $L_2^{2}(0,\pi)$.

Научная новизна исследования.

- Вывод формулы сдвига и установление оценки между различными L_p^{2m} нормами корневых (собственных и присоединенных) вектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка.
- Установление критерия бесселовости систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$.
- Установление критерия безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$.
- Доказана теорема об эквивалентной базисности систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$.
- Доказана теорема о покомпонентной равномерной

равносходимости на компакте с тригонометрическим рядом разложений вектор-функций из класса $L_2^{2m}(0,\pi)$ в ортогональный ряд по собственным вектор-функциям оператора типа Дирака $2m$ -го порядка.

- Доказаны оценки между различными L_p^2- нормами корневых вектор-функций оператора типа Дирака и установлены критерии бесселевости и безусловной базисности в $L_2^2(G)$, $G=(a,b), mes\, G<\infty$ систем корневых вектор-функций данного оператора.

Теоретическая и практицеская ценность исследования. Работа носит теорический характер. Ее результатымогут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов (операторов типа Дирака); при обосновании методом Фурье решение некоторых задач математической физики.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации докладывались: на Международной конференции Азербайджан-Турция-Украина МАДЕА 7 (Баку, 2015); International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators" (Baku, 2016); International conference on Mathematical advances and applications Istanbul-Turkey (Baku, 2018); Modern problems of Mathematics and Mechanics Proceedings of the International conference devoted of the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciens (Baku, 2019); на семинаре кафедры «Математический анализ» (рук.д.ф.-м.н., проф. Б.А.Алиев) Азербайджанского Государственного Педагогического Университета.

Личный вклад автора. Все выводы и полученные результаты принадлежат лично автору.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием обьема каждого структурного подразделенияв отдельности). Общий обьем диссертационной работы- 214600 знаков (титульная страница-320 знаков, содержание 2280 знаков, введение-46000 знаков, первая глава-98000 знаков, вторая глава-66000 знаков, заключение-2000). Список используемой литературы состоит из 102 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работа состоит из введения, двух глав и списка литературы. Каждая из глав разбита на параграфы.

В диссертации исследуются бесселевостьи безусловная базисность систем корневых вектор-функций операторов типа Дирака $2m$-го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$, проблема покомпонентной равномерной равно-сходимости на компакте ортогонального разложения по собственным вектор-функциям одномерного оператора типа Дирака $2m$-го порядка с тригонометрическим разложением.

В первой главе диссертации рассматривается оператор типа Дирака $2m$-го порядка:

$$Du = B\frac{du}{dx} + P(x)u\,,\;\; u = (u_1, u_2, \ldots, u_{2m})^T\,,\; m \geq 1 \qquad (1)$$

определенный на произвольном интервале $G = (a,b)$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$ или $B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, I -единичный оператор в E^m,

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad P(x)=\left(p_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{2m}$$ -суммируемая комплекснозначная матрица-функция $2m\times 2m$.

Устанавливаются оценки для собственных и присоединенных вектор-функций оператора D, исследуются вопросы о бесселевости и базисности систем корневых вектор-функций данного оператора, установливаются критерии бесселевости и безусловной базисности и доказана теорема об эквивалентной базисности в $L_2^{2m}(0,2\pi)$.

Следуя В.А.Ильину будем понимать корневые вектор-функции оператора D безотносительно к виду краевых условий, а именно, под собственной вектор-функцией оператора D, отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую тождественно не равную нулю комплекснозначную вектор-функцию $\overset{0}{u}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подынтервале интервала G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$D\overset{0}{u}=\lambda\overset{0}{u}.$$

Аналогично, под присоединенной вектор-функцией порядка $\ell,\ \ell\geq 1$, отвечающей тому же λ и собственной функцией $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную вектор-функцию $\overset{\ell}{u}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подынтервале G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$D\overset{l}{u}=\lambda\overset{l}{u}+\overset{l-1}{u}.$$

Теорема 1. *Пусть функции $p_{ij}(x)$, $i,j=\overline{1,2m}$ принадлежат классу $L_1^{loc}(G)$. Тогда для любого компакта*

$K \subset G$ существуют константы $C^r(K,l,m)$, $r = 1,2$; $l = 0,1,2,\dots$ не зависящие от λ, такие что справедливы оценки

$$\left\| \overset{l-1}{u} \right\|_{L_\infty^{2m}(K)} \le C^1(K,l,m)(1+|\operatorname{Im}\lambda|)\left\| \overset{l}{u} \right\|_{L_\infty^{2m}(K)}, \tag{2}$$

$$\left\| \overset{l}{u} \right\|_{L_\infty^{2m}(K)} \le C^2(K,l,m)(1+|\operatorname{Im}\lambda|)^{1/p}\left\| \overset{l}{u} \right\|_{L_p^{2m}(K)},\ 1 \le p < \infty, \tag{3}$$

где $\overset{-1}{u} \equiv 0$

Замечание 1. Если G-конечный интервал, $p_{ij}(x)$ ($i,j=\overline{1,2m}$) принадлежат классу $L_1(G)$, то оценки (0.0.8) и (0.0.9) справедливы и в случае $K = \overline{G}$.

Отметим, что для корневых вектор-функций обыкновенных дифференциальных операторов такие оценки установлены и нашли свое широкое применение в работах В.А.Ильина, Н.Б.Керимова, Л.В.Крицкова, В.М.Курбанова, И.С.Ломов, В.В. Тихомирова. А в случае оператора Дирака такие оценки установлены в работах В.М.Курбанова, В.М.Курбанов и А.И.Исмайловой, А.М. Абдуллаевой, Л.З.Буксаевой.

В 1.3 исследуются вопросы о бесселевости и базисности систем корневых вектор-функций оператора D с суммируемым потенциалом. Установливаются критерии бесселевости и безусловной базисности и доказывается теорема об эквивалентной базисности в $L_2^{2m}(0,2\pi)$.

Система $\{\vartheta_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^{2m}(G)$ называется бесселевой, если существует постоянная M такая, что для любой вектор-функции $f(x) \in L_2^{2m}(G)$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(f,\vartheta_k)\right|^2 \le M\|f\|_2^2.$$

Система $\{\vartheta_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^{2m}(G)$ квадратично близка к системе $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^{2m}(G)$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\vartheta_k - \tau_k\|_2^2 < \infty.$$

Две последовательности элементов в гильбертовом пространстве H называются эквивалентными, если существует линейный ограниченный и ограниченно обратимый в H оператор переводящий одну из этих последовательностей в другую.

В 1.3.1 исследуются вопросы о бесселевости систем корневых вектор-функций оператора D с суммируемым потенциалом и установливается критерии бесселевости в $L_2^{2m}(G)$, $G = (0, 2\pi)$.

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - произвольная система, составленная из корневых вектор-функций оператора D, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ - соответствующая ей система собственных значений. Кроме того вектор-функция $\psi_k(x)$ входит в систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ вместе со всеми соответствующими ей присоединёнными вектор-функциями меньшего порядка. Это озночает, что $D\psi_k = \lambda_k \psi_k + \theta_k \psi_{k-1}$ где θ_k равно либо 0 (в этом случае $\psi_k(x)$- собственная вектор-функция), либо 1 (в этом случае $\psi_k(x)$- присоединенная вектор-функция, причем $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), $\theta_1 = 0$.

Теорема2. (Критерий бесселевости). *Пусть $P(x) \in L_1(G) \otimes C^{2m \times 2m}$, длины цепочек корневых вектор-функций равномерно ограничены и существует постоянная C_0 такая, что*

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| \le C_0, \; k = 1,2,... \quad (4)$$

Тогда для бесселевости системы $\left\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *в* $L_2^{2m}(G)$ *необходимо и достаточно существование константы* M_1 *такой, что*

$$\sum_{|\mathrm{Re}\,\lambda_k-\tau|\le 1} 1 \le M_1\,, \qquad (5)$$

где τ *- произвольное действительное число.*

Обозначим через D^* формально сопряженный оператор к оператору D, т.е.

$$D^* = B\frac{d}{dx} + P^*(x),$$

где $P^*(x)$-сопряженная матрица к матрице $P(x)$.

Пусть система $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ минимальна $L_2^{2m}(G)$, а ее биортогонально сопряженная система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из корневых вектор-функций оператора D^* т.е. $D^*\varphi_k = \overline{\lambda}_k\varphi_k + \theta_{k+1}\varphi_{k+1}$.

В 1.3.2 исследуются вопросы о базисности систем корневых вектор-функций оператора D. Установливается критерии безусловной базисности и доказывается теорема об эквивалентной базисности в $L_2^{2m}(0,2\pi)$.

Теорема 3. (О безусловной базисности). *Пусть* $P(x)\in L_1(G)\otimes C^{2m\times 2m}$, *длины цепочек корневых вектор-функций равномерно ограничены, одна из систем* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *полна в* $L_2^{2m}(G)$ *и выполняется условие (10).*

Тогда необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2^{2m}(G)$ *каждой из этих систем является существование постоянных* M_1 *и* M_2, *обеспечивающих справедливость неравенства (11) и*

$$\|\psi_k\|_2 \|\varphi_k\|_2 \le M_2, \quad k = 1,2,... \tag{6}$$

Замечание 2. Отметим, что при условиях теоремы 3 выполнение неравенств (5) и (6) является необходимым и достаточным условием для базисности Рисса каждой из систем $\left\{\psi_k(x)\|\psi_k(x)\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ и $\left\{\varphi_k(x)\|\varphi_k(x)\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^{2m}(G)$.

Замечание 3. В достаточной части теоремы 3 условие равномерной ограниченности длины цепочек корневых вектор-функций следует опустить, ибо оно содержится в условии (5).

Теорема 4. (Об эквивалентной базисности). *Пусть* $P(x) \in L_1(G) \otimes C^{2m\times 2m}$, *выполняются условия (4)-(6) и система* $\left\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *квадратично близка к некоторому базису* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *пространства* $L_2^{2m}(G)$.

Тогда системы $\left\{\psi_k(x)\|\psi_k\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\left\{\varphi_k(x)\|\psi_k\|_2\right\}_{k=1}^{\infty}$ *является базисами в* $L_2^{2m}(G)$, *причем эквивалентны соответственно базису* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и его биортогонально сопряженной системе.*

В 1.4 изучается покомпонентная равномерная равносходимость на компакте с тригонометрическим рядом разложений $2m$-компонентных вектор-функций в ортогональный ряд по собственным вектор-функциям оператора типа Дирака

$$D\psi = B\frac{d\psi}{dx} + P(x)\psi, \quad x \in G = (0,\pi), \tag{7}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ или $B = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$, I-единичный оператор в E^m, $J = \left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=1}^{m}$, $\alpha_{k,m-k+1} = 1$, $k = \overline{1,m}$; $\alpha_{ij} = 0$ при $(i,j) \ne (k, m-k+1)$, $k = \overline{1,m}$; $P(x) = diag\ (p_1(x), p_2(x),..., p_{2m}(x))$; $\psi = \left(\psi^1, \psi^2,...,\psi^{2m}\right)^T$; $p_l(x), l = \overline{1,2m}$ -действительнозначные функции из $L_p(0,\pi)$,

$p > 2$. Доказываются теоремы о покомпонентной равномерной равносходимости и покомпонентному принципу локализации.

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полная ортонормированная в $L_2^{2m}(G)$ система, состоящая из собственных вектор-функций оператора D, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k \in R$, соответствующая система собственных значений.

Введем для произвольной $f(x) \in L_2^{2m}(G)$ частичную сумму её спектрального разложения по системе $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma_\nu(x,f) = \left(\sigma_\nu^1(x,f), \sigma_\nu^2(x,f), \ldots, \sigma_\nu^{2m}(x,f)\right)^T,$$

где

$$\sigma_\nu^j(x,f) = \sum_{|\lambda_k| \le \nu} (f, \psi_k)\, \psi_k^j(x),$$

$$\psi_k(x) = \left(\psi_k^1(x), \psi_k^2(x), \ldots, \psi_k^{2m}(x)\right)^T,$$

$$f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{2m}(x)\right)^T.$$

Наряду с частичной суммой $\sigma_\nu(x,f)$ определим вектор

$$S_\nu(x,f) = \left(S_\nu(x,f_1), S_\nu(x,f_2), \ldots, S_\nu(x,f_{2m})\right)^T,$$

где $S_\nu(x,f_j)$, $j = \overline{1,2m}$, модифицированная частичная сумма тригонометрического ряда функции $f_j(x)$, т.е.

$$S_\nu(x,f_j) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\sin \nu(x-y)}{x-y}\, f_j(y)\, dy, \qquad \nu > 0.$$

Главные результаты данного параграфы сосредоточены на следующих двух теоремах.

Теорема 5. *Пусть функции* $p_l(x)$, $l=\overline{1,2m}$, *принадлежат классу* $L_p(G)$, $p>2$. *Тогда для произвольной вектор-функции* $f(x)\in L_2^{2m}(G)$ *на любом компакте* $K\subset G$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left\|\sigma_\nu^j(\cdot,f)-S_\nu\left(\cdot,f_j\right)\right\|_{C(K)}=0,\quad j=\overline{1,2m},\tag{8}$$

т.е. j*-я компонента разложения вектор-функции* $f(x)\in L_2^{2m}(G)$ *в ортогональный ряд по системе* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *равномерно равносходится на любом компакте* $K\subset G$ *с разложением в тригонометрический ряд Фурье соответствующей* j*-й компоненты* $f_j(x)$ *вектор-функции* $f(x)$.

Из теоремы 5 с учетом принципа локализации для тригонометрического ряда Фурье следует теорема о покомпонентному принципу локализации.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 0.0.5. Тогда для ортогонального разложения произвольной функции* $f(x)\in L_2^{2m}(G)$ *по системе* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *справедлив покомпонентный принцип локализации: сходимость или расходимость* j*-й компоненты указанного разложения в точке* $x_0\in G$ *зависит от поведения в малой окрестности этой точки* x_0 *только соответствующей* j*-й компоненты* $f_j(x)$ *разлагаемой вектор-функции* $f(x)$ *(и не зависит от поведений других компонентов).*

Во второй главе диссертации рассматривается оператор типа Дирака

$$D_1y=By'+P(x)y\ ,$$

$$y(x)=\left(y_1(x),\ y_2(x)\right)^T,$$

$B=\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$, $b_2<0<b_1$, $P(x)=diag\ (p_1(x),\ p_2(x))$ на интервале $G=(a,b)$, $mesG<\infty$. Доказываются оценки между различными L_p^2- нормами корневых вектор-функций данного оператора. Устанавливается критерий бесселевости и безусловной базисности в $L_2^2(G)$ систем корневых вектор-функций оператора D_1.

В 2.1 устанавливаются оценки между L_∞^2 нормами двух соседних корневых векторов и между L_∞^2 и L_p^2, $1\le p<\infty$ - нормами одного и того корневого вектора данного оператора. Данный параграф состовлен из двух подпараграфов. В подпараграфе 2.1.1 установливаются формулы сдвига и формулы средного значения для корневых вектор-функций оператора D_1.

Лемма 1 (см.[30]). (Формулы сдвига). *Если функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$ принадлежат классу $L_1^{loc}(G)$ и точки $x-t,\ x,\ x+t$ находятся в области G, то справедливы следующие формулы:*

$$\overset{l}{u}(x+t)=\left[cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_2|}}\ t\,I-sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_2|}}\ t\frac{B}{\sqrt{|b_1b_2|}}\right]\overset{l}{u}(x)+$$

$$+B^{-1}\int_x^{x+t}\left(sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_2|}}\ (t-\xi+x)\frac{B}{\sqrt{|b_1b_2|}}-cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1b_2|}}\ (t-\xi+x)I\right)\times$$

$$\times\left[P(\xi)\overset{l}{u}(\xi)-\overset{l-1}{u}(\xi)\right]d\xi, \qquad (9)$$

$$\overset{l}{u}(x-t)=\left[\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_2|}}\,t\,I+\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_2|}}\,t\,\frac{B}{\sqrt{|b_1 b_2|}}\right]\overset{l}{u}(x)+$$

$$+B^{-1}\int_{x-t}^{x}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_2|}}\,(t+\xi-x)\frac{B}{\sqrt{|b_1 b_2|}}+\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_2|}}\,(t+\xi-x)I\right)\times$$

$$\times\left[P(\xi)\overset{l}{u}(\xi)-\overset{l-1}{u}\,\xi\right]d\xi, \qquad (10)$$

$$\overset{l}{u}(x+t)+\overset{l}{u}(x-t)=2\overset{l}{u}(x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_2|}}\,t+$$

$$+B^{-1}\int_{x-t}^{x+t}\left(\sin\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_2|}}\,(t-|x-\xi|)\frac{B}{\sqrt{|b_1 b_2|}}-\operatorname{sgn}(\xi-x)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{|b_1 b_2|}}\,(t-|x-\xi|)I\right)\times$$

$$\times\left[P(\xi)\overset{l}{u}(\xi)-\overset{l-1}{u}(\xi)\right]d\xi, \qquad (11)$$

где I-единичный оператор в E^2, E^2-двухмерное евклидово пространство.

Основываясь на формулы (9)-(11) в подпараграфе 2.1.2 установливаются оценки для корневых вектор-функций оператора D_1.

Теорема 7. *Пусть функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ принадлежат классу $L_1^{loc}(G)$. Тогда для любого компакта $K \subset G$ существуют константы $C^i(K,l,b_1,b_2)$, $i=1,2$, $l=0,1,2,...$, не зависящие от λ, такие, что справедливы оценки*

$$\left\|\overset{l-1}{u}\right\|_{L_\infty^2(K)}\le C^1(K,l,b_1,b_2)\left(1+|Im\,\lambda|\right)\left\|\overset{l}{u}\right\|_{L_\infty^2(K)}, \qquad (12)$$

$$\left\| \overset{l}{u} \right\|_{L^2_\infty(K)} \le C^2(K,l,b_1,b_2)\left(1+\left|Im\,\lambda\right|\right)^{\frac{1}{p}} \left\| \overset{l}{u} \right\|_{L^2_p(K)}, \quad 1 \le p < \infty. \quad (13)$$

Замечание 4. Если G конечный интервал, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ принадлежат классу $L_1(G)$, то оценки (12) и (13) справедливы и в случае $K = \overline{G}$.

В 2.2 устанавливается критерий бесселевости и безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака D_1 в $L_2^2(G)$.

Пусть $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$- произвольная система, составленная из собственных и присоединённых функций оператора D_1, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ - соответствующая ей система собственных значений. Кроме того функция $u_k(x)$ входит в систему $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ вместе со всеми соответствующими ей присоединёнными функциями меньшего порядка. Это озночает, что $D_1 u_k = \lambda_k u_k + \theta_k u_{k-1}$ где θ_k равно либо 0 (в этом случая $u_k(x)$-собственная вектор-функция), либо 1 (в этом случая $u_k(x)$-присоединенная вектор-функция, причем $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), $\theta_1 = 0$.

Главные результаты данного параграфа сосредоточены в следущих двух теоремах.

Теорема 8. (Критерий бесселевости). *Пусть G- конечный интервал, функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$ принадлежат классу $L_2(G)$, длины цепочек корневых функций равномерно ограничены и существует константа C_0 такая, что*

$$\left|\operatorname{Im}\lambda_k\right| \le C_0,\ k = 1,2,... \quad (14)$$

Тогда, для того чтобы система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, где $\varphi_k(x) = u_k(x)\|u_k\|_{2,2}^{-1}$, удовлетворяла неравенству Бесселя необходимо и достаточно существование константы K такой, что

$$\sum_{|\operatorname{Re}\lambda_k - \nu| \le 1} 1 \le K \tag{15}$$

где ν - произвольное действительное число.

Обозначим через D_1^* формально сопряженный оператор к оператору D_1, т.е. $D_1^* = -B^* \dfrac{d}{dx} + P^*(x)$, где $P^*(x)$ -сопряженная матрица к матрице $P(x)$.

Теорема 9. (О безусловной базисности). *Пусть G - конечный интервал, $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - произвольная полная в $L_2^2(G)$ и минимальная система, состоящая из собственных и присоединённых функций оператора D_1, система $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, биортогонально сопряженная к $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^2(G)$ и состоящая из собственных и присоединённых функций оператора D_1^** (т.е. $D_1^*\upsilon_k = \overline{\lambda}_k\upsilon_k + \theta_{k+1}\upsilon_{k+1}$), *полна в $L_2^2(G)$, длина любой цепочки корневых векторов равномерно ограничена и выполняется условие (20).*

Тогда необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2^2(G)$ системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является существование постоянных K и M_1, обеспечивающих справедливость неравенств (15) и

$$\|u_k\|_{2,2}\|\upsilon_k\|_{2,2} \le M_1 \tag{16}$$

для любого $k = 1,2$.

Отметим, что при условиях теоремы 9 выполнение неравенств (15) и (16) является необходимым и достаточным условием базисности Рисса системы $\left\{u_k(x)\|u_k\|_{2,2}^{-1}\right\}$ в $L_2^2(G)$.

В заключении, выражаю глубокую благодарность научному руководителю профессору В.М.Курбанову за постановку задачи, постоянное внимание и полезные советы к работе.

ВЫВОДЫ

- Выведены формулы сдвига и установлены оценки между различными L_p^{2m} нормами корневых (собственных и присоединенных) вектор-функций оператора типа Дирака $2m$-го порядка.
- Установлен критерии бесселовости систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$-го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$.
- Установлен критерий безусловной базисности систем корневыхвектор-функций оператора типа Дирака $2m$-го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$
- Доказана теорема об эквивалентной базисности систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$-го порядка в пространстве $L_2^{2m}(0,2\pi)$
- Доказана теорема о покомпонентной равномерной равносходимостина компакте с тригонометрическим рядом разложений вектор-функций из класса $L_2^{2m}(0,\pi)$ в ортогональный ряд по собственным вектор-функциям оператора типа Дирака $2m$-го порядка.
- Доказаны оценки между различными L_p^2- нормами корневыхвектор-функций оператора типа Дирака и установлены критерий бесселевости и безусловной базисности в $L_2^2(G),\ G=(a,b),\ mesG<\infty$ систем корневых вектор-функций данного оператора.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1.Kurbanov, V.M., Ismailova, A.I., Hajiyeva, G.R. Basicity of the systems of root vector-functions of one dimensional Dirac operator // Madea-7. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conference. Mathematical Analysis, Differential Equations and their applications. -Baku: 2015. -pp.96-98.
2. Гаджиева, Гю. Р. Неравенство Рисса и базисность для системы типа Дирака $2m$-го порядка // Əməkdar elm xadimi, professor Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü il dönümünə həsr olunmuş “Funksional analiz və onun tətbiqləri” adlı Elmi Konfransın Materialları., -Bakı: -2016. -с. 118-120.
3. Гаджиева, Гю. Р. Оценки для корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$-го порядка // Известия педагогического университета. Серия математических и естественных наук., -Баку: -2017. №1, -с. 41-52.
4.Курбанов, В.М., Гаджиева, Гю. Р. Теорема о безусловной базисности для системы типа Дирака $2m$-го порядка //AMEA-nın Müxbir üzvü, tanınmış alim və görkəmli riyaziyyatçı, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Qoşqar Teymuroğlu Əhmədovun anadan olmasının 100 illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri” adlı Respublika Elmi Konfransının Materialları. -Bakı: -2017, -с.211-212.
5.Kurbanov, V.M., Ibadov, E.J., Hajiyeva, G.R. On Bessel property and unconditional basicity of the $2m\times 2m$ system of root vector-functions of Dirac type operator //Azerbaijan Journal of Mathematics, -Baku: -2017. v.7, №2, -pp.21-32.
6. Hajiyeva G.R. Estemations for the root functions of a Dirac type operator // ICOMAA, International conference on Mathematical advances and applications. -Istanbul/Turkey: -2018. -pp.69.
7.Гаджиева, Гю. Р. Оценки для корневых функций оператора типа Дирака // Известия педагогического университета. Серия математических и естественных наук., -Баку: -2019. С.67, №2, -с.32-47.
8. Kurbanov, V.M., Hajiyeva, G.R. Estimations for root vectors of the functions of Dirac type operator // Modern problems of

Mathematics and Mechanics Proceedings of the International conference devoted of the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciens. –Bakı: -2019. -pp.318-320.
9. Курбанов, В.М., Гаджиева, Гю. Р. Неравенство Бесселя и базисность для $2m \times 2m$ системы типа Дирака с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения, - Москва: -2020. т.56, №5, -с.584-594.
10. Hajiyeva G.R. On uniform equiconvergence for Dirac type $2m \times 2m$ systems // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, Baku: -2020. v.40, №1, -pp.88-95.

Защита диссертации состоится **«23» сентября 2022** года в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан посоответствующим адресам **07 июля 2022** года.

Подписано в печать: 10.06.2022
Формат бумаги: 60x841/16
Объём:39371
Тираж:70