АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Специальность: 1214.01 – Динамические системы и оптимальное управление
Отрасль науки: Математика
Соискатель: **Мехрибан Мамед кызы Ягубова**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени доктора философии по математике

Баку – 2022

Работа выполнена в Научно Исследовательском Институте Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете.

Научный руководитель: академик, д.ф.-м.н., профессор
Фикрет Ахмедали оглы Алиев

Научный консультант:
доктор физико-математическихнаук, профессор
Александр Петрович Афанасьев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Мисраддин Аллахверди оглы Садыгов
доктор физико-математических наук, профессор
Ягуб Амияр оглы Шарифов
доктор наук по математике, доцент
Ильгар Гурбат оглы Мамедов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.
________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:
доктор физико-математических наук, профессор
________ **Гамлет Фарман оглы Гулиев**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Несмотря на достаточно интенсивное развитие теории оптимального управления в процессах, описываемых уравнениями с частными производными, научный интерес к таким задачам не ослабевает, а наоборот, еще больше увеличивается. Основной причиной этого является, то что в связи с приложениями к решению новых прикладных задач приходиться рассматривать уравнения более высоких порядков. А это в свою очередь приводить к постановке новых математических задач и созданию новых схем для их исследования. В качестве примера можно показать задачи, связанные с уравнениями в частных производных, третьего и четвертого порядков. При этом следует отметить, что задачи оптимального управления связанные с уравнениями четвертого порядка изучались в работах В.Комкова, Ж.Л.Лионса, А.И.Егорова, Т.К.Сиразетдинова, Г.Ф.Кулиева, А.А.Мехтиева, Г.Ф.Кулиева, В.Б.Назаровой. Во всех этих работах, в основном, получены необходимые условия оптимальности, достаточные условия оптимальности, доказаны теоремы существования оптимального управления и построено оптимальное управление как решение задачи синтеза или в виде ряда.

Для уравнений третьего порядка, или так называемых уравнений переменного типа, известны некоторые результаты, М.А.Ягубова, Р.Б.Гусейновой, в которых получены необходимые условия оптимальности, получено в виде ряда оптимальное управление в случае одной пространственной переменной.

Предлагаемая диссертация так же посвящена исследованию различных задач оптимального управления в процессах, описываемых уравнениями переменного типа в случае многих пространственных переменных. Полученные в работе результаты могут быть использованы для решения прикладных задач. Поэтому тема диссертационной работы является актуальной.

Предмет и объект исследования. Начально-краевая задача и задачи оптимального управления для уравнений третьего порядка с частными производными.

Цель и задачи исследования. Вывод различных необходимых условий оптимальности и достаточных условий оптимальности, исследование задач управляемости, построение оптимальных распределенных и стартовых управлений в случае линейного уравнения с двумя пространственными переменными с квадратичным критерием качества.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы функционального анализа, метод Фурье, методы математической теории оптимального управления и теории двойных функциональных рядов.

Основные положения, выносимые на защиту.

– вывод формулы для градиента функционала с распределенным управлением в правой части уравнения третьего порядка,
– вывод необходимых условий оптимальности в виде принципа максимума,
– вывод интегралных условий оптимальности,
– вывод достаточных условий оптимальности в случае выпуклого функционала и выпуклого множества значений управлений,
– доказательство дифференцируемости квадратичного функционала в случае линейного уравнения при наличии распределенного и стартового управлений,
– построение оптимального управления в виде двойного ряда и доказательство его сходимости,
– сведение задачи управляемости с минимальной энергией при наличии распределенного и стартовых управлений сведена к задаче на условный экстремум, получение решения в виде двойного ряда и доказательство его сходимости,
– построение в виде двойного ряда решения задачи с минимальной энергией при наличии распределенного и двух стартовых управлений,
– показать применимость проблемы моментов к решению задачи стабилизации в случае, когда решение смешанной задачи обращается в ноль в конечный момент времени,
– сведение задачи стабилизации к задаче на условный экстремум и построение решения этой задачи в виде сходящегося двойного ряда.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Для процессов, описываемых нелинейным уравнением третьего порядка со многими независимыми переменными,

выведены необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума и интегральные условия оптимальности.

2. Получена формула для градиента функционала при наличии распределенного управления.
3. Доказана достаточность условий при предположении выпуклости функционала по управляющим переменным и выпуклости множества значений этих переменных.
4. При наличии распределенного и стартового управлений обоснована дифференцируемость квадратичного функционала, когда процесс описывается линейным уравнением третьего порядка с управляющей функцией и в начальном условии.
5. Показана возможность применения метода разделения переменных в случае двух пространственных переменных и построены в виде двойных рядов, как решение смешанной задачи, так и оптимального управления. Доказана сходимость этих рядов.
6. Построено решение задачи управляемости в виде двойных рядов при наличии распределенного и стартового управлений, сведением ее к задаче на условный экстремум функции двух независимых переменных.
7. Построены решения в виде двойных рядов задачи с минимальной энергией при наличии распределенного и двух стартовых управлений, доказаны сходимости этих рядов.
8. Доказана применимость проблемы моментов к задаче стабилизации в одном случае, эта задача сведена к задаче на условный экстремум, построено решение в виде сходящего двойного ряда.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Рассматриваемые в диссертации уравнения описывают задачи газовой динамики, турбулентность, горение и другие процессы. Однако, постановки задач оптимального управления и полученные результаты носят теоретический характер. Методы и схемы исследования, приведенные в работе, могут быть использованы для исследования задач оптимального управления в процессах, описываемых уравнениями высоких порядков.

Апробация и применение. Полученные в диссертации результаты в разные времена докладывались на семинарах Института прикладной математики Бакинского Государственного Университета (руков., акад. Ф.А.Алиев), на конференциях, посвященных 85-летию со дня рождения члена корр. НАНА Я.Дж.Мамедова (Баку, 10 декабря,2015г.), 100-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки, проф. А.Ш.Габибзаде (Баку, 22-23 июня 2016г.), 100-летию со дня рождения академика НАНА М.Л.Расулова (Баку, 28-29 октября, 2016г.), на III Республиканской конференции «Прикладные задачи математики и новые информационные технологии» (Сумгаит, 15-16 декабря 2016г.), на республиканской научной конференции посвященной 100-летию со дня рождения члена корр. НАНА К.Т.Ахмедова (Баку, 02-03 ноября, 2017 г.), на 6-ой Международной конференции «Управление и оптимизация с применением в промышленности » (Баку 11-13 июля, 2018 г.). на Международной научной конференции оз. Банное, 10-14 марта 2020 г., УФА РИЦ БашГУ.

Личный вклад автора. Для процессов, описываемых нелинейным уравнением третьего порядка со многими пространственными переменными при наличии распределенного управления введены различные необходимые условия оптимальности, показана возможность применения метода разделения переменных, т.е. метода Фурье, в случае линейного уравнения с двумя пространственными переменными, построены как решение начально-граничной задачи, так и оптимальных управлений в виде двойных рядов, доказана их сходимость. Причем, все доказательства и результаты принадлежат лично автору.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях, рекомендованных ВАК при Президенте Азербайджанской Республики, в том числе в журнале с импакт-фактором Web of Science – 1, в журнале с импакт-фактором Scopus – 1. Кроме них, полученные результаты опубликованы в международных конференциях – 2, один из них за рубежом, на уровне республиканской конференции – 5.

Наименование учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в Научно-исследовательском

Институте Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий объем диссертационной работы – 185456 знаков (титульная страница – 462 знаков, оглавление – 2099 знаков, введение – 36137 знаков, первая глава – 40000 знаков, вторая глава – 58000 знаков, третья глава – 48000 знаков, заключение – 758 знаков). Список используемой литературы состоит из 56 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы и приводится краткое содержание полученных результатов.

Первая глава диссертации состоит из двух разделов.

В разделе 1.1 рассматривается задача минимума функционала

$$I(u) = \int_Q \Phi(x,t,z,z_x,z_t,u)dxdt \tag{1}$$

на решениях задачи

$$\beta z_{tt} + z_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} F_i(x,t,z_x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x,t,z_x) = f_1(x,t,u), \tag{2}$$

$$z(x,0) = \varphi_1(x), \quad z_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad z\big|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

где $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset R^n$ - область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2+\alpha}$, $\Gamma = \Omega \times (0,T)$, $z_x = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1},...,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)$, T фиксированный момент времени, β - положительное постоянное, $u = (u_1,...,u_r)$ вектор управления, причем в качестве допустимых управлений берутся измеримые на Q вектор-функции $u = u(x,t)$, со значениями из ограниченного множества $U \subset R^r$.

Всюду в этой главе предполагается, что выполняются условия:

1. $F_i(x,t,z_x)$, $i = 1,2,...,n$ дважды непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам и

а) $K_0\sum_{i=1}^{n}\left(1+|\xi|^{p-2}\right)\xi_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} F_i(x,t,\xi)\xi_i \ \le K\sum_{i=1}^{n}\left(1+|\xi|^{p-2}\right)\xi_i^2$,

б) $\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial F_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_i}\eta_i\eta_j \ge K_0\sum_{i=1}^{n}\left(1+|\xi|^{p-2}\right)\eta_i^2$,

в) $\left|\frac{\partial F_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}\right| \ge K\left(1+|\xi|^{p-2}\right)$,

г) $\left|\frac{\partial F_i(x,t,\xi)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial F_i(x,t,\xi)}{\partial x_j}\right| + \left|F_i(x,t,\xi)\right| \ge K\left(1+|\xi|^{p-1}\right),\ i,j=\overline{1,n}$;

2. $A_i(x,t,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируемые по всем аргументам функции и

а) $\left|A_i(x,t,\xi)\right|^2 + \left|\frac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial x_i}\right|^2 \le C\left(1+|\xi|^p\right)$,

б) $\left|\frac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}\right|^2 \le C\left(1+|\xi|^{p-2}\right)$,

где K_0, K, C положительные постоянные, $\xi=\left(\xi_1,...,\xi_n\right), p\ge 2$.

3. Функция $f_1(x,t,u)$ непрерывно дифференцируема по всем аргументам.

При выполнении этого условия ясно, что для каждого допустимого управления $u=u(x,t)$ функция $f_1(x,t,u(x,t))$ будет измеримой функцией и $f_1(x,t,u(x,t))\in L_2(Q)$.

4. Функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ удовлетворяют условия:

$$\varphi_1\in \overset{0}{W}_{2p}(\Omega),\ \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\right|^{p-1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\in W_2^1(\Omega),\ \varphi_2\in L_2(\Omega).$$

Отметим, что при выполнении приведенных условий для каждого допустимого управления начально-краевая задача (2), (3) имеет обобщенное решение, под которым понимается функция $z(x,t)$,

$$z \in L_p\left(0,T;\overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)\right), u_t \in L_\infty\left(0,T;L_2(\Omega)\cap L_2(0,T)\right); \overset{0}{W}{}_p^1(\Omega), B^{1/2}\Delta_x z \in L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right)$$

удовлетворяющая для любой $G(x,t) \in L_p\left(0,T;\overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)\right)$

интегральное тождество

$$\int_Q \left(\beta z_t(x,t) + z(x,t)\right)G(x,t)dxdt + \int_Q \sum_{i=1}^n F_i\left(x,t,z_t(x,t)\right)G_{x_i}(x,t)dxdt +$$

$$+\int_Q \sum_{i=1}^n G_{x_i}(x,t)\int_0^t A_i(x,\tau)z_x(x,\tau)d\tau dxdt = \int_Q \left(\beta\varphi_2(x,t) + \varphi_1(x,t)\right)G(x,t)dxdt +$$

$$+\int_Q \sum_{i=1}^n F_i\left(x,0,\varphi_{1x}(x)\right)G_{x_i}(x,t)dxdt + \int_Q G(x,t)\int_0^t f_1\left(x,\tau,u(x,\tau)\right)dxdt$$

и начальному условию $z(x,0) = \varphi_1(x)$, где $B(x)$ неотрицательная, гладкая финитная в Ω функция, Δ-оператор Лапласа.

Относительно $\Phi(x,t,z,\xi,\eta,u)$ предполагается, что

5. $\Phi(x,t,z,\xi,\eta,u)$ дважды непрерывно дифференцируема по всем аргументам и

$$\left|\Phi(x,t,z,\xi,\eta,u)\right| \le a_0 + a_1\left(|z|^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right),$$

где a_0, a_1 некоторые положительные постоянные,

$$|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2, \quad |\eta|^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_n^2.$$

При этих предположениях выведена формула для приращения функционала, получена оценка для его остатка. На основе этих оценок доказана

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1-5. Тогда функционал (1), определенный на решениях начально-краевой задачи (2), (3) дифференцируем по Гато в $L_2(Q)$ и

$$gradI(u) = -H_u(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u),$$

где $\psi(x,t)$ - решение сопряженной задачи:

$$\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial t}\cdot\frac{\partial F_i(x,t,z_x)}{\partial z_{x_j}}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial A_i(x,t,z_x)}{\partial z_{x_j}}\right)-\frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z_{x_j}}\right)+\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H(x,t,\psi,u)}{\partial z_t}\right)=0\,,$$

$$\psi(x,T)=0,\quad x\in\overline{\Omega}\,,$$

$$\beta\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}+\frac{\partial H(x,T,\psi,u)}{\partial z_t}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(\frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F_i(x,T,z_x(x,T)}{\partial z_{x_j}}\right)=0\,,\ x\in\Omega\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial F_i}{\partial z_{x_j}}-\psi\,\frac{\partial A_i}{\partial z_{x_j}}\right)\cos(\nu,x_i)=0\,,\ x\in\partial\Omega\,,\ t\in(0,T)\,,\ j=1,2,...,n\,;$$

$$\psi(x,0)=0,\quad x\in\partial\Omega\,,\ j=1,2,...,n\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\ \frac{\partial\psi(x,T)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F_i(x,t,z_x(x,T)}{\partial z_{x_j}}\cdot\cos(\nu,x_j)=0\,,\quad x\in\partial\Omega\,.$$

$$H_u(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u)=\Phi(x,t,z,z_x,z_t,u)+\psi f_1(x,t,u).$$

В разделе 1.2 этой главы выводятся различные необходимые условия оптимальности в поставленной в разделе 1.1 задаче. В частности доказана.

Теорема 2. (Интегральное условие оптимальности) Пусть выполняются условия теоремы 1 и U выпуклое множество. Если $u^0(x,t)$ оптимальное управление, то для любого допустимого управления $u(x,t)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Pi_\alpha}(H_u(x,t),u(x,t)-u^0(x,t))dxdt\geq 0\,,$$

где

$\Pi_\alpha = \{x_i^0 - \sqrt[n+1]{\alpha} \le x_i \le x_i^0 + \sqrt[n+1]{\alpha},\ t^0 - \sqrt[n+1]{\alpha} \le t \le t^0 + \sqrt[n+1]{\alpha}\ ,\ i = 1,2,...,n\}$ $(n+1)$-мерный параллелепипед, содержащийся в Q, $H_u(x,t)$ производная $H_u(x,t,z,z_x,z_t,\psi,u)$ при $u = u^0(x,t)$, а $z^0(x,t), \psi^0(x,t)$-решения задачи (2), (3) и сопряженной задачи, соответствующие $u = u^0(x,t)$.

Далее, используя свойство выпуклого функционала доказана.

Теорема 3. (Необходимое и достаточное условия оптимальности) Пусть U выпуклое множество, $I(u)$ выпуклый функционал и выполняются условия теоремы 1. Для оптимальности управления $u^0(x,t)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\min_{u \in U} \int_Q (H_u(x,t), u - u^0(x,t))dxdt = 0 .$$

Вторая глава диссертации состоит из двух разделов.
В первом разделе рассматривается следующая задача: найти такие управляющие функции $u = u(x,y,t),\ v = v(x,y)$, которые вместе с соответствующим решением начально-краевой задачи

$$\beta z_{tt} + z_t - \frac{\partial}{\partial t}\Delta z - \Delta z = u(x,y,t),\ (x,y) \in Q\ , \tag{4}$$

$$z(0,y,t) = z(x,0,t) = z(a,y,t) = z(x,b,t) = 0\ , \tag{5}$$

$$z(x,y,0) = v(x,y),\ z_t(x,y,0) = 0\ , \tag{6}$$

доставляет минимум функционалу

$$J(u,v) = \int_\Omega \left|z(x,y,T) - z_0(x,y)\right|^2 dxdy +$$
$$+ \alpha_1 \int_Q u^2(x,y,t)dxdydt + \alpha_2 \int_\Omega v^2(x,y)dxdy\ , \tag{7}$$

где $Q = (0,T) \times \Omega = \{0 < t < T,\ 0 < x < a, 0 < y < b\}\ , \beta, T, a, b$ - заданные положительные числа, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

По общепринятому, $u(x,y,t)$ называется распределенным управлением, а $v(x,y)$, следуя Лионса, назовем стартовым управлением.

В качестве распределенного управления берем функции $u(x,y,t)\in L_2(Q)$ для которых $\|u\|_{L_2}\le R^2$, а в качестве стартового управления $v(x,y)$- функции из $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)$, причем $\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\frac{\partial v}{\partial x},\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|\frac{\partial v}{\partial y}\in W_2^1(\Omega)$, для которых почти всюду в Ω выполняются условия $l_1\le v(x,y)\le l_2$. Далее, для допустимой пары $p=(u(x,y,t),v(x,y))$ вводится гильбертов пространство $H=L_2(Q)\times W_2^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$\langle p_1,p_2\rangle=\int_Q u_1(x,y,t)u_2(x,y,t)dxdydt+$$

$$+\int_\Omega\left[v_1(x,y)v_2(x,y)+\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]dxdy$$

и приводится определение обобщенного решения (4)-(6):
под обобщенным решением понимается функция

$$z\in L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),z_t\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$$B^{\frac{1}{2}}\Delta z\in L_2(0,T;L_2(\Omega)),$$

удовлетворяющее интегральное тождество

$$\int_Q(\beta z_t(x,y,t)+z(x,y,t))g(x,y,t)dxdydt+$$

$$+\int_Q(z_x(x,y,t)g_x(x,y,t)+z_y(x,y,t)g_y(x,y,t))dxdydt+$$

$$+\int_Q g_x(x,y,t)\int_0^t z_x(x,y,s)dsdxdydt+$$

$$+\int_Q g_y(x,y,t)\int_0^t z_y(x,y,s)dsdxdydt = \int_Q v(x,y)g(x,y,t)dxdydt +$$

$$+\int_Q v_x(x,y)g_x(x,y,t)dxdydt + \int_Q v_y(x,y)g_y(x,y,t)dxdydt +$$

$$+\int_Q g(x,y,t)\int_0^t u(x,y,s)dsdxdydt,$$

где $B(x)$ положительная внутри Ω гладкая, финитная функция, а $g(x,y,t)$ произвольная функция из $L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$.

После преобразования приращения показано, что функционал $J(u,v)$ дифференцируем в введенном пространстве H, из которого следует справедливость теоремы

Теорема 4. Функционал (7) дифференцируем в H и его градиент

$$J'(u,v) = (-\psi(x,y,t) + 2\alpha_1 u(x,y,t); 2[z(x,y,T) - z_0(x,y)] +$$

$$+\int_0^T \Delta\psi(x,y,s)ds + 2\alpha_2 v(x,y)),$$

где $\psi(x,y,t)$ решение сопряженной задачи:

$$-\beta\psi_t + \psi - \Delta\psi + \int_t^T \Delta\psi(x,y,s)ds + 2[z(x,y,T) - z_0(x,y)] = 0,$$

$$\psi(x,y,T) = 0, \qquad \psi(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0,\ 0 \le t \le T.$$

Так как, уравнение (4) и условия (5), (6) линейны, а квадратичный функционал (7) и множество допустимых управлений выпуклые, в силу известного свойства (8) получается, справедливость следующей теоремы

Теорема 5. Для оптимальности управления $p^0(x,y,t) = (u^0(x,y,t), v^0(x,y))$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\int_Q (-\psi(x,y,t) + 2\alpha_1 u^0(x,y,t))(u(x,y,t) - u^0(x,y,t))dxdydt +$$

$$+\int_{\Omega}\left[2(z(x,y,T)-z_0(x,y))+\int_0^T \Delta\psi(x,y,s)ds+2\alpha_2 v^0(x,y)\right]\times$$

$$\times(v(x,y)-v^0(x,y))dxdy\geq 0$$

для любого $p(x,y,t)=(u(x,y,t),v(x,y))$.

В разделе 2.2. этой главы исследуется следующая задача: найти такое допустимое управление $\left(v^0(x,y),v^1(x,y),u(x,y,t)\right)$, соответствующее ему решение уравнения (4) удовлетворяющее граничным условиям (5) и начальным условиям

$$z(x,y,0)=v^0(x,y),\ z_t(x,y,0)=v^1(x,y) \tag{9}$$

удовлетворяло условию

$$z(x,y,T)=\varphi(x,y) \tag{10}$$

и функционал

$$J(u,v^0,v^1)=\int_Q u^2(x,y,t)dxdydt+$$

$$+\alpha_0\int_{\Omega}\left(v^0(x,y)\right)^2dxdy+\alpha_1\int_{\Omega}\left(v^1(x,y)\right)^2dxdy \tag{11}$$

принимал наименьшее значение, где $\varphi(x,y)$ заданная функция из $L_2(\Omega)$, α_0, α_1, положительные постоянные.

При этом в качестве распределенного управления берем функции $u(x,y,t)\in L_2(Q)$, для которых $\|u\|_{L_2(Q)}\leq R$, а в качестве стартовых управлений берем функции $v^0(x,y)\in W_2^2(\Omega)$, для которых $l_1^0\leq v^0\leq l_2^0$ и функции $v^1(x,y)\in L_2(\Omega)$, для которых $l_1^1\leq v^1\leq l_2^1$.

Сначала вводится определение обобщенного решения задачи (4), (5), (9), под которым понимается функция

$$z(x,y,t)\in L_2(0,T,W_2^1(\Omega));\ z_t\in L_\infty(0,T,L_2(\Omega))\cap L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),\ B^{\frac{1}{2}}\Delta z\in L_2(0,T,L_2(\Omega))$$

удовлетворяющего интегральное тождество

$$\int_Q\left[\beta z_t(x,y,t)+z(x,y,t)\right]g(x,y,t)dxdydt+$$

$$+\int_Q \left[z_x(x,y,t)g_x(x,y,t)+z_y(x,y,t)g_y(x,y,t)\right]dxdydt+$$

$$+\int_Q g_x(x,y,t)\int_0^t z_x(x,y,s)dsdxdydt+\int_Q g_y(x,y,t)\int_0^t z_y(x,y,s)dsdxdydt=$$

$$=\int_Q \left[\beta v^1(x,y)+v^0(x,y)\right]g(x,y,t)dxdydt+$$

$$+\int_Q \left[v_x^0(x,y)g_x(x,y,t)+v_y^0(x,y)g_y(x,y,t)\right]dxdydt+$$

$$+\int_Q g(x,y,t)\int_0^t u(x,y,s)dsdxdydt,$$

где $B(x,y)$ положительная внутри Ω гладкая функция, $g(x,y,t)$ произвольная функция из $L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$, а далее, применяя метод разделения переменных (т.е. метода Фурье) получается представление решения задачи в виде двойного ряда

$$z(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_2(m,n)-k_1(m,n)}\left\{\frac{1}{\beta}\int_0^t\left[e^{k_2(m,n)(t-s)}-e^{k_1(m,n)(t-s)}\right]u_{mn}(s)ds+\right.$$

$$+\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b\left[\left(k_2(m,n)e^{k_1(m,n)t}-k_1(m,n)e^{k_2(m,n)t}\right)v^0(\xi,\eta)+\left(e^{k_2(m,n)t}-e^{k_1(m,n)t}\right)v^1(\xi,\eta)\right]\times$$

$$\left.\times\sin\frac{m\pi\xi}{a}\cdot\sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi d\eta\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (12)$$

где

$$\lambda_{mn}=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,\ X_{mn}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b},\quad m,n=1,2,...$$

собственные значения и собственные функции задачи

$$\Delta X+\lambda X=0,\quad X|_{\Gamma}=0,$$

где Γ граница прямоугольника Ω; $k_1(m,n)$, $k_2(m,n)$ корни характеристического уравнения для дифференциального уравнения

$$\beta\ddot{T} + (\lambda_{mn} + 1)\dot{T} + \lambda_{mn} T = 0 \quad m, n = 1, 2, \ldots,$$

$$u_{mn}(t) = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u(x, y, t)\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

Положим

$$v^0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$v^1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^1 \sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Доказываются, что ряд в (12) и ряды получаемые из (12) дифференцированием по x, y, t сходятся сильно в L_2 и поэтому выражение (12) является решением (4), (5), (9). Далее, задача минимума функционала (11) сводится к задаче, точнее к последовательности задач на условный экстремум функционала

$$I_{mn} = \int_0^T u_{mn}^2(t)dt + \alpha_0\left(v_{mn}^0\right)^2 + \alpha_1\left(v_{mn}^1\right)^2 \tag{13}$$

при условии

$$\int_0^T \left[e^{k_2(m,n)(T-s)} - e^{k_1(m,n)(T-s)}\right]u_{mn}(s)ds + \beta\left(k_2(m,n)e^{k_1(m,n)T} - k_1(m,n)e^{k_2(m,n)T}\right)v_{mn}^0 +$$
$$+ \beta\left(e^{k_2(m,n)T} - e^{k_1(m,n)T}\right)v_{mn}^1 = \beta k_2\left((m,n) - k_1(m,n)\right)\varphi_{mn} \quad m, n = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

где

$$\varphi_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \varphi(x, y)\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

Для этой задачи составляется функция Лагранжа, определяется ее стационарная точка $\left(\tilde{u}_{mn}(t), \tilde{v}_{mn}^0, \tilde{v}_{mn}^1\right)$ и доказывается, что эта точка является точкой минимума функционала (13) при выполнении условия (14).

Далее доказывается

Теорема 6. Если $\varphi(x, y) \in L_2(\Omega)$, то ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_{mn}^2(t), \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{v}_{mn}^1\right)^2, \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{v}_{mn}^1\right)^2$$

сходятся в $L_2(\Omega)$, $W_2^2(Q)$ и $L_2(\Omega)$, соответственно.

Третья глава диссертации так же состоит из двух разделов. В первом разделе рассматривается следующая задача стабилизации с минимальной энергией: найти такое допустимое управление $u = u(x, y, t)$, для которого решения уравнения (4), удовлетворяющее условию (5) и условию

$$z(x, y, 0) = z_0(x, y), \quad z_t(x, y, 0) = z_1(x, y) \tag{15}$$

удовлетворяло условию

$$z(x, y, T) = 0 \tag{16}$$

а функционал

$$J = \| u \|^2 = \int_Q u^2(x, y, t)\,dxdydt$$

принимал наименьшее значение.

Для решения поставленной задачи, сначала при помощи метода Фурье получается представление решения начально-краевой задачи в виде

$$z(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta(k_2(m,n) - k_1(m,n))} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_0^t \left[e^{k_2(m,n)(t-s)} - e^{k_1(m,n)(t-s)} \right] u_{mn}(s)\,ds + \right.$$

$$+ \frac{4}{ab} \cdot \int_0^a \int_0^b \left[\left(k_2(m,n) z_0(\xi,\eta) - z_1(\xi,\eta) \right) e^{k_1(m,n)t} + \right.$$

$$\left. + \left(z_1(\xi,\eta) - k_1(m,n) z_0(\xi,\eta) \right) e^{k_2(m,n)t} \right] \times$$

$$+ \frac{4}{ab} \cdot \int_0^a \int_0^b \left[\left(k_2(m,n) z_0(\xi,\eta) - z_1(\xi,\eta) \right) e^{k_1(m,n)t} + \left(z_1(\xi,\eta) - k_1(m,n) z_0(\xi,\eta) \right) e^{k_2(m,n)t} \right] \times$$

$$\left. \times \sin\frac{m\pi\xi}{a} \cdot \sin\frac{n\pi\eta}{b}\,d\xi d\eta \right\} \times \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi y}{b}$$

и показывается, что полученный ряд и ряды полученные заменой его членов производными по t, x, y сходятся равномерна в $L_2(Q)$. Следовательно, этот ряд является обобщенным решением задачи (4), (5), (15). Далее при помощи этого представления и условия

$z(x, y, T) = 0$ получены уравнения

$$\int_0^T \frac{e^{k_2(m,n)(T-s)} - e^{k_1(m,n)(T-s)}}{\beta(k_2(m,n) - k_1(m,n))} u_{mn}(s)ds = f_{mn}, \ m, n = 1,2,... \qquad (17)$$

для определения $u_{mn}(t)$, где

$$u_{mn}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy, m, n = 1,2,...$$

$$f_{mn}(t) = \int_0^a \int_0^b [-W(x, y, T)] \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy,$$

а $W(x, y, t)$- решение однородного уравнения, соответствующего (4) при условиях $W(0, y, t) = W(x,0,t) = W(a, y, t) = W(x,b,t) = 0$, $W(x, y,0) = z_0(x, y), W_t(x, y,0) = z_1(x, y).$

Таким образом, задача минимума функционала $J(u)$ сведена к определению последовательности $\{u_{mn}(t), \ m, n = 1,2,...\}$ удовлетворяющую системе уравнений (17) для которой функционал

$$J = \int_0^T \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^2(t)dt = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_{mn} \qquad (18)$$

принимал наименьшее значение.

Ясно, что полученная задача является задачей проблемы моментов и показывается, что она имеет единственное решение

$$v_{mn}^0(t) = \frac{f_{mn}}{\alpha_{mn}} F_{mn}(T - t) \ ,$$

где

$$F_{mn}(T - t) = \frac{e^{k_2(m,n)(T-t)} - e^{k_1(m,n)(T-t)}}{\beta(k_2(m,n) - k_1(m,n))}, \ \alpha_{mn} = \int_0^T F_{mn}^2(T - t)dt$$

и для этого $v_{mn}^0(t)$ наименьщее значение J_{mn} будет

$$J_{mn} = \frac{f_{mn}^2}{\int_0^T F_{mn}^2(T-t)dt},$$

а

$$J = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}^2}{\int_0^T F_{mn}^2(T-t)dt}. \tag{19}$$

В конце раздела доказывается сходимость двойного ряда (19).

Таким образом, имеет место теорема

Теорема 7. Если $z_0(x,y) \in \overset{0}{W}{}_4^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$, $\left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| \frac{\partial z_0}{\partial x}$ и $\left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| \frac{\partial z_0}{\partial y}$ из $W_2^1(\Omega)$, $z_1(x,y) \in L_2(Q)$, то двойной ряд (19) сходится.

В разделе 3.2 этой главы рассматривается следуюшая задача: найти такое дотимое управление $u = u(x,y,t)$, соответсвующее решение уравнения (4) удовлетворяющее условию (5) и условию

$$z(x,y,0) = 0, \quad z_t(x,y,0) = z_1(x,y), \; (x,y) \in \Omega \tag{20}$$

удовлетворяло условию

$$z_t(x,y,T) = 0, (x,y) \in \Omega, \tag{21}$$

а функционал

$$J = \int_Q u^2(x,y,t)dxdydt$$

принимал наименьшее значение.

Прежде всего решение начално-краевой задачи (4), (5), (20) ищется виде

$$z(x,y,t) = V(x,y,t) + W(x,y,t),$$

где $V(x,y,t)$ решение неоднородного уравнения

$$\beta V_{tt} + V_t - \frac{\partial}{\partial t}\Delta V - \Delta V = u(x,y,t) \tag{22}$$

удовлетворяющего условиям

$$V(0,y,t)=V(x,0,t)=V(a,y,t)=V(x,b,t)=0, \tag{23}$$

$$V(x,y,0)=0,\ \ V_t(x,y,0)=0, \tag{24}$$

а $W(x,y,t)$ решение однородного уравнения

$$\beta W_{tt}+W_t-\frac{\partial}{\partial t}\Delta W-\Delta W=0, \tag{25}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$W(0,y,t)=W(x,0,t)=W(a,y,t)=W(x,b,t)=0 \tag{26}$$

и начальным условиям

$$W(x,y,0)=0,\ \ W_t(x,y,0)=z_1(x,y). \tag{27}$$

Сначала, применяя метод разделения переменных (метод Фурье) получается представление решения задачи, а потом решается задача (22), (23), (24) и с их помощью получено представление

$$z(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_2(m,n)-k_1(m,n)}\frac{1}{\beta}\int_0^t\left[e^{k_2(m,n)(t-s)}-e^{k_1(m,n)(t-s)}\right]u_{mn}(s)ds+$$

$$+\frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a\int_0^b\left\{\frac{-z_1(\xi,\eta)e^{k_1(m,n)t}}{k_2(m,n)-k_1(m,n)}+\frac{z_1(\xi,\eta)e^{k_2(m,n)t}}{k_2(m,n)-k_1(m,n)}\right\}\times$$

$$\times\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}d\xi d\eta\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{28}$$

решения задачи (4), (5), (20) и доказана сходимость рядов в правой части этого представления.

Используя представление (28) при помощи условия (21) задача минимума сведена к последовательности задач на условный экстремум функционалов

$$I_{mn}=\int_0^T u_{mn}^2(t)dt,\quad m,n=1,2,...$$

при условиях

$$\int_0^T\left[k_2(m,n)e^{k_2(m,n)(T-s)}-k_1(m,n)e^{k_1(m,n)(T-s)}\right]u_{mn}(s)ds=$$

$$= -\beta\left[k_2(m,n)e^{k_2(m,n)T} - k_1(m,n)e^{k_1(m,n)T}\right] z_{1mn},\; m,n = 1,2,\dots.$$

Далее найдены стационарные точки этих задач в виде

$$\tilde{u}_{mn}(t) = -\frac{\beta B_{mn}(0) z_{1mn} B_{mn}(t)}{\int\limits_0^T B_{mn}^2(t)dt},$$

$$B_{mn}(t) = k_2(m,n)e^{k_2(m,n)(T-t)} - k_1(m,n)e^{k_1(m,n)(T-t)}$$

и доказана сходимость двойного ряда

$$J = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^T u_{mn}^2(t)dt,$$

точнее, доказана теорема

Теорема 8. Функция $u(x,y,t)$, определяемая рядом

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

доставляет минимум функционалу и соответствующее ей решение задачи (4), (5), (20) удовлетворяет условию (21).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа, состоящая из трех глав, посвящена выводу необходимых условий оптимальности и построению оптимального управления для различных задач связанных с уравнением в частных производных третьего порядка. В работе получены следующие рузультаты:

- выведена формула для градиента и получены различные необходимые условия, а таже необходимые и достаточные условия в одном частном случае;
- задача управляемости с минимальной энергией при наличии распределенного и одного, а также двух стартовых управлений сведена к задаче на условный экстремум, получено решение в виде двойного ряда и доказано его сходимость;
- дано применение проблемы моментов к решению задачи стабилизации при условии, что решение соответсвующей смешанной задачи обращается в ноль в конечный момент времени;
- послучено решение задачи стабилизации в виде сходящегося двойного ряда.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в следующих работах:

1. Ягубова, М.М. Задачи оптимального управления в процессах, описываемых уравнением с частными производными третьего порядка // -Баку: Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, -2015, №2, -с.77-89
2. Ягубова, М.М. О построении методом моментов оптимального управления для линейного уравнения третьего порядка с квадратичным критерием качества // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», -2016, №4, -с.47-53
3. Ягубова, М.М. Решение одной задачи стабилизации с минимальной энергией в процессах описываемых линейным уравнением третьего порядка // -Баку: Journal of Qafqaz University, Mathematics and computer science, V.4, -2016, №1, -pp.87-94
4. Ягубова, М.М. Решение одной задачи оптимального управления с распределенным и стартовым управлениями // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, №1, -2016, -с.67-76
5. Ягубова, М.М. Об оптимальном управлении в одной системе с распределенным и стартовым управлениями // -Баку: Известия педагогического Университета,- 2015, №2, -с.27-34
6. Ягубова, М.М. Некоторые необходимые условия оптимальности в одной задаче, описываемой уравнением третьего порядка. AMEA-nın müxbir üzvü, Dövlət mükafatı laureatı, Əməkdar elm xadimi, professor Yəhya Məmmədovun anadan olmasının 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq elmi konfransın materialları, -Bakı: -10 dekabr,- 2015-cı il, -с. 36-38
7. Ягубова, М.М. О решении одной задачи оптимального управления для линейного уравнения с частными производными третьего порядка / "Əməkdar elm xadimi, professor Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cu ildönümünə həsr olunmuş "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı respublika elmi konfransının materialları, -Bakı: -2016, 22-23 iyun, -с.221-223

8. Ягубова, М.М. О приминении проблемы моментов к задаче управляемости в процессах, описываемых уравнением третьего порядка. Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının həqiqi üzvü, əməkdar elm xadimi, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Məcid Lətif oğlu Rəsulovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş "Nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın aktual məsələləri" respublika elmi konfransının materialları, -Şəki: -28-29 oktyabr, 2016-cı il, -с. 178-179
9. Ягубова, М.М. Формула для градиента функционала и необходимые условия оптимальности в одной задаче управления, Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları, III Respublika Elmi konfransı, -Sumqayıt: -15,16 dekabr, -2016-cı il, -с16-17
10. Ягубова, М.М. О сведении одной задачи оптимального управления к задаче на условный экстремум в процессе, описываемого линейным уравнением с частными производными третьего порядка. AMEA-nın müxbir üzvü, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru professor Qoşqar Teymur oğlu Əhmədovun 100 illik yubilenyinə həsr olunmuş " Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" respublika elmi konfransının materialları, -Baku: -02-03 noyabr, -2017-ci il, -s.295-297
11. Yaqubova, M.A. On a solution of an optimal control problem for the linear third order partial differential equation, Reports of national Academy of sciences of Azerbaijan, -2017, V.LXXIII, №1,-p.11-15
12. Yaqubova, M.M. Redusing the optimal control problem for third order equation to the unconditional problem. The 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications,-11-13 July,-2018 , -Baku Azerbaijan: - p.299-301
13. Ягубова, М.М. Об одной задаче оптимального управления для процессов описываемых линейным уравнением третьего порятка . Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения, Сборник тезисов Международной научной конференции, -УФА: РИЦ БашГУ, -10-14 марта, -2020, -с. 75

Защита диссертации состоится **“30” сентября 2022 года в 14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **«06» июля 2022 года.**